Probabilités - Conditionnement - Loi binomiale

Terminale générale
spécialité maths

Les questions les plus importantes de la vie ne sont pour la plupart que des problèmes de probabilité.
Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827)

Table des matières

Toute connaissance dégénère en probabilité ;
et cette probabilité est plus ou moins grande,
en fonction de notre expérience de la vérité ou de la fausseté de notre compréhension,
et en fonction de la simplicité ou de la complexité de la question.
David Hume (1711-1776)

Notre cerveau a une tendance naturelle à penser que si, sous une hypothèse, des résultats sont peu probables alors l'hypothèse elle-même est peu probable.
Ce raisonnement est faux.

I - Rappels : arbres et probabilités conditionnelles

1) Probabilités conditionnelles

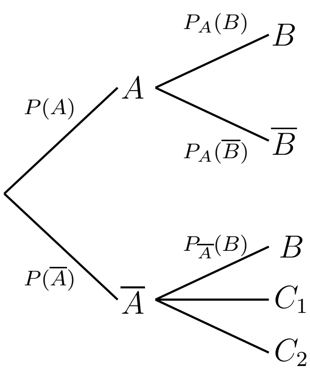
Définition *Soit A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.*
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercice 1 La probabilité qu'un jeune réussisse l'examen du permis de conduire l'année de ses 18 ans est de 0,625 et celle qu'il soit reçu au baccalauréat cette même année est de 0,82.
De plus, la probabilité d'être à la fois reçu au baccalauréat et à l'examen du permis de conduire la même année est de 0,56.

1. Calculer la probabilité qu'un jeune soit reçu à au moins un des deux examens.
2. En déduire la probabilité qu'il ne soit reçu à aucun des deux examens.
3. Déterminer la probabilité qu'un jeune réussisse au baccalauréat sachant qu'il a déjà eu son permis la même année.

2) Arbre pondéré



Règle 1. La somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

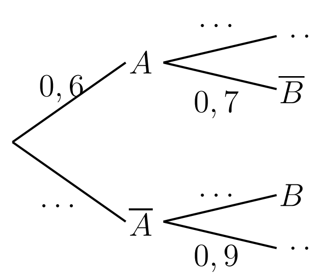
Règle 2. Sur chaque branche, on inscrit la probabilité conditionnelle : probabilité de l'événement de droite sachant celui de gauche.

Règle 3. Un chemin correspond à l'intersection des événements.
Sa probabilité est le produit des probabilités.

Règle 4. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

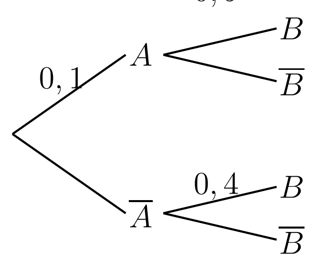
Exercice 2 On considère une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.

1. Compléter cet arbre.
2. Déterminer $P(A \cap B)$ et $P(B)$.
3. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.



Exercice 3 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre. On sait de plus que $P(B) = 0,39$.

1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.
3. Déterminer la probabilité de A sachant B.

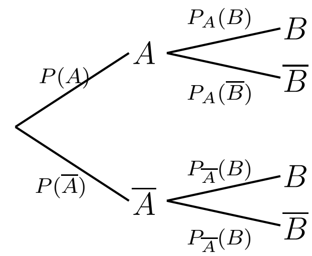


Exercice 4 Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.
— 80 % ont réussi le test.
— Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % le passaient pour la 1ère fois.
— Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % le passaient pour la 1ère fois.
On considère les événements R :"l'élève a réussi au test", et F :"l'élève a passé le test plusieurs fois".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité et dresser un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
3. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
4. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

Exercice 5 Formule de Bayes.



1. Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Représenter la situation par un arbre et montrer la formule $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$, puis $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$.

Exercice 6 Applications de la formule de Bayes

1. On dispose de 100 pièces de monnaie. Une pièce sur quatre est truquée. Une pièce truquée indique Pile avec une probabilité de $\dfrac{4}{5}$.
   On choisit au hasard une pièce parmi les 100, on la lance et on obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?
2. Dans une population, une personne sur quatre triche. Lorsqu'on fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un tricheur, il tire à tous les coups un as.
   α) On demande à une personne au hasard de tirer une carte, quelle est la probabilité qu'un as soit tiré ?
   β) Un as a été tiré. Quelle est la probabilité que j'ai eu affaire à un tricheur ?
3. **Peur des coupures de courant ?**
   Le système électrique dans un bâtiment est quasi-certainement endommagé lors d'un incendie ; plus précisément, il y a 99 chances sur 100 pour que le courant soit coupé lors d'un incendie.
   Hors incendie, les normes électriques permettent d'avoir des systèmes assez fiables et la probabilité d'une coupure de courant reste de l'ordre d'une chance sur 1000.
   Enfin, statistiquement, un incendie se déclare tous les 3 ou 4 ans, c'est-à-dire que, plus précisément, un incendie survient un jour donné avec une probabilité de 10^{-3}.

   Les lunières viennent de s'éteindre brusquement ! Quelle est la probabilité pour que se soit un incendie ?

Exercice 7 Test de dépistage

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :
- sa *sensibilité* : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).
- sa *spécificité* : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).
- sa valeur prédictive positive (ou valeur diagnostique) : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
- sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du concepteur (laboratoire).
Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensiblité du test) ;
- la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).

On notera par la suite les événements M :"l'individu est malade" et T :"le test est positif".

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.
   a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité de l'événement T.

   c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.

2. Calculer de même les valeurs prédictives positives de ce test pour une maladie qui toucherait 1% de la population, puis 0,1% de la population.
3. On suppose maintenant que la proportion de malade est f.
   a) Déterminer l'expression $G(f)$ de la valeur prédictive positive en fonction de f.
   b) Etudier la fonction G et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   c) Quel inconvénient majeur présente, dans une population, le dépistage d'une maladie rare ? d'une maladie dont on ne connaît pas (encore) l'étendue ?

Exercice 8 Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :
— la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;
— s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
— s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.
On note, pour tout entier naturel n non nul, G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » et p_n sa probabilité. On a donc en particulier $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite (p_n).
6. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
7. En déduire la limite de la suite (p_n).
8. Déterminer la valeur du plus petit entier n à partir duquel on a $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-6}$.

3) Indépendance

Définition *On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$.*
"Savoir que l'événement A est arrivé ne change pas la probabilité de l'événement B".

Remarque :
— Si A et B sont indépendants, on a aussi $P_B(A) = P(A)$.
— Ne pas confondre indépendance et incompatibilité *(A et B sont incompatibles, ou disjoints, lorsque $A \cap B = \emptyset$)*

Propriété *Les événements A et B sont indépendans si et seulement si $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Exercice 9 Les événements A et B des exercices 2 et 3 sont-ils indépéndants ?

II - Répétition d'expériences aléatoires : loi binomiale

Exercice 10 On dispose d'une pièce déséquilibrée : quand on la lance, la probabilité d'obtenir Pile est p.

1. On lance cette pièce 2 fois successivement.
   a) Représenter la situation par un arbre.
   b) Combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement : 0 fois Pile ? 1 fois Pile ? 2 fois Pile ?
   c) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de Pile obtenus sur 2 lancers.
2. Mêmes questions en lançant 3 fois successivement cette pièce : combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 0 fois Pile, 1 fois Pile, 2 fois Pile et 3 fois Pile ? Donner la loi de probabilité correspondante.
3. Mêmes questions en lançant 4 fois successivement cette pièce.
4. Une pièce donne Pile avec une probabilité de 0,9. On la lance 10 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 9 fois Pile.

1) Coefficients binomiaux

Définition *Le nombre de façons d'obtenir k succès parmi n répétitions s'appelle* ***coefficient binomial****, noté* $\binom{n}{k}$*, qui se lit "k parmi n".*
Le ***Triangle de Pascal*** *contient ces coefficients binomiaux :*

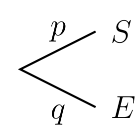
$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			...	...		

Relation de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

2) Épreuve et loi de Bernoulli

Définition *Une* ***épreuve de Bernoulli*** *est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, appelées généralement sucès S et échec E, de probabilités p et $q = 1 - p$.*



Définition *Une* ***variable aléatoire de Bernoulli*** *est à valeur dans $\{0; 1\}$ et associée à une épreuve de Bernoulli.*
La loi de probabilité est appelée ***loi de Bernoulli*** *de paramètre p.*

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété *Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on a $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$, et donc $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.*

<u>Démonstration:</u> *Rappels :* $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k$ *et* $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 p_k$*, avec* $p_k = P(X = x_k)$.
Par définition de l'espérance, on a

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

De même,

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(x_1 - E(x)\right)^2 \times P(X = x_1) + \left(x_2 - E(x)\right)^2 \times P(X = x_2) \\ &= (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) = (1-p)\Big(p(1-p) + p^2\Big) = p(1-p) \end{aligned}$$

□

3) Schéma de Bernoulli

Définition *Un **Schéma de Bernoulli** est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.*

Exercice 11 On tire au hasard successivement et avec remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. À chaque tirage, tirer un as est considéré comme un succès.

1. Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'as tirés. Donner la loi de probabilité de X.

4) Loi binomiale

Définition *On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de probabilité de succès p.*
On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus.
*La loi de probabilité de la variable X est appelée **loi binomiale** de paramètre n et p, et est notée $\mathcal{B}(n;p)$.*

Propriété *Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ alors, pour tout entier k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$,*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

De plus, l'espérance de X est $E(X) = np$, sa variance est $V(X) = np(1-p)$ et son écart type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

<u>Démonstration:</u> On peut décrire la situation par un arbre à n "étages". Chaque chemin de cet arbre a k succès et $n-k$ échecs, et a donc une probabilité $p^k(1-p)^k$.

Le nombre de chemins contenant n succès (et donc $n-k$ échecs) est le nombre de façons qu'il y a de choisir ces k succès parmi les n répétitions, soit $\binom{n}{k}$.

On en déduit donc la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$. □

Exercice 12 La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,15$.

1. Donner les expressions et calculer $P(X = 6)$, $P(X = 15)$, $P(X \leqslant 15)$, $P(X \geqslant 16)$ et $P(13 \leqslant X \leqslant 17)$.
2. Préciser l'espérance et l'écart type de X.
3. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,95$.
4. Calculer les probabilités $P_{X\leqslant 10}(X = 9)$ et $P_{X\geqslant 10}(X \leqslant 15)$.

Exercice 13 Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un QCM. À chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir exactement 3 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir au moins 3 bonnes réponses.
4. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Exercice 14 Dans une ville de 50 000 habitants, on a recensé 1 000 cas de grippe. On s'intéresse au nombre d'enfants malades dans une crèche de 30 enfants.
On note X le nombre d'enfants atteints par la grippe et on modélise la loi de X par une loi binomiale.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) A :"Deux enfants exactements sont malades" b) B :"Il y a au moins un enfant malade".

Exercice 15 Une étude statistique a montré qu'une mère qui possède un caractère génétique C le transmet à son enfant dans un cas sur dix. Une femme, qui possède ce caractère génétique C, souhaite fonder une famille de quatre enfants.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'enfants parmi les quatre présentant le caractère C.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité de l'événement : "Un enfant au moins présente le caractère C".
3. L'événement : "Deux enfants ou plus présentent le caractère C." est-il très improbable ?

Exercice 16 Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Donner le cas échéant les valeurs de ses paramètres.

1. On lance 5 fois successivement un dé à jouer truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.
2. On lance 5 fois successivement un dé à jouer, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6.
3. On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.
4. Une branche présente 10 fleurs : 2 blanches et 8 roses. On cueille, successivement et au hasard, 3 fleurs et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.
5. On fait un sondage en interrogeant successivement 10 personnes dans un groupe de 20 personnes. On note X le nombre de personnes qui ont répondu "Oui".
6. Dans une population de 10 millions personnes, on fait un sondage en interrogeant successivement 100 personnes. On note X le nombre de personnes qui ont répondu "Oui".

Exercice 17 Une machine produit des pièces dont, en moyenne, 5 % sont défectueuses.
On prépare des lots en prélèvant au hasard 10 pièces dans la production. Le nombre de pièces dans le stock est assez important pour que l'on puisse considérer le tirage comme étant avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses sur nos 10 pièces prélevées.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer les probabilités des événements : "$X = 0$", "$X = 1$", $X = 2$, et "$X \geqslant 3$".

Exercice 18 En france, il y a environ 12 % de gauchers. On considère une classe de 30 élèves, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans cette classe.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.
2. Combien d'élèves gauchers peut-on s'attendre à trouver dans la classe ?
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un seul gaucher dans la classe.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait 2 gauchers ou plus dans la classe.
5. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,99$. Interpréter ce nombre.

Exercice 19 Un homme se présente dans un village gaulois et se déclare devin.
Les habitant sceptiques se proposent de tester ses dons en lui demandant de deviner les résultats de 10 lancers d'une pièce équlibrée. Il donne 8 fois la bonne réponse.

1. On suppose que les réponses du devin sont données au hasard.
   Calculer dans ce cas la probabilité qu'il donne 8 fois la bonne réponse.
2. Les habitants du village (experts bien sûr en probabilité) seront-ils enclins à croire ce devin ?

Exercice 20 Pour contrôler des lots d'articles on procède de la manière suivante : on prélève un article au hasard dans le lot, s'il est défectueux le lot est déclaré mauvais, sinon on en prélève un deuxième. S'il est défectueux on déclare le lot mauvais, sinon on en prélève un troisième. S'il est défectueux on déclare le lot mauvais, sinon on accepte le lot.
On note p la proportion d'articles défecteux et on considère que le nombre important d'articles permet de d'assimiler le tirage à un tirage avec remise.

1. Déterminer en fonction de p la probabilité de refuser le lot.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'articles prélevés. Déterminer l'espérance de Y.
3. Comparer ces résultats à ceux que l'on aurait obtenus en prélevant directement trois articles et en refusant le lot si au moins l'un de ces articles était défectueux.

Exercice 21 Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques au médicament A et 40% sont allergiques au médicament B.
Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. On note X la variable aléatoire qui associe à n analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On suppose que $n = 10$. Calculer à 10^{-2} près les probabilités de chacun des événements suivants :
   a) aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
   b) au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.
3. Un organisme tiers établit que 2% des individus sont allergiques à A et à B simultanément. Peut-on en conclure que les événements "être allergique à A" et "être allergique à B" sont indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.
   a) Déterminer le plus petit entier $a$tel que $P(Y \leqslant a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(Y \leqslant b) \geqslant 0,95$.
   b) En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geqslant 0,95$.
   c) Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie B. Que peut-on en conclure ?