Logarithme népérien

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 On se place dans un RON, et on note d la droite d'équation $y = x$.

1. On considère les points $M(x; y)$ et $M'(y, x)$.
   a) Donner un vecteur directeur de d et montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à d.
   b) Montrer que les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite d.
2. On considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction carré : $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.
   b) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$. Préciser ses coordonnées et celles de son symétrique M' par rapport à d.
   c) Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, la courbe de quelle fonction est décrite par M' ? Quel lien y-a-t'il entre la fonction carré et cette fonction ?

Exercice 2 1. Résoudre les équations : • $e^x = 1$ • $e^x = e$ • $e^x = \dfrac{1}{e}$

2. a) Montrer que pour tout réel strictement positif λ, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $e^x = 2$.

I - Logarithme népérien : définition et premières propriétés

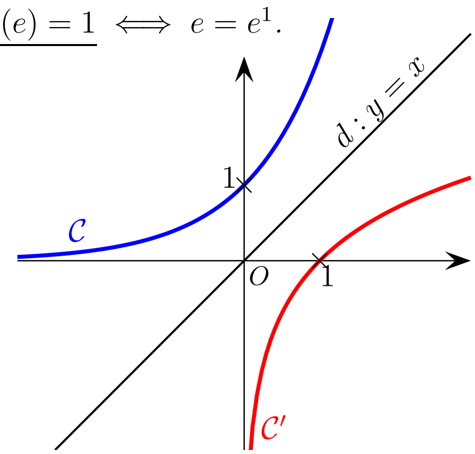
Définition *Pour tout nombre a strictement positif, on on appelle **logarithme népérien** de a l'unique solution réelle de l'équation* $e^x = a$.
Autrement dit, on a, pour $a > 0$, $\boxed{e^x = a \iff x = \ln(a)}$

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ *qui à tout réel* $x > 0$ *associe le réel* x, *noté* $\ln(x)$, *dont l'exponentielle est* x.

La fonction logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle.

Propriété
- *Pour tout réel* $x > 0$ *et tout réel* y, $x = e^y$ *équivaut à* $y = \ln(x)$.
- *Pour tout réel* $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- *Pour tout réel* x, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln(1)$ *est le nombre dont l'exponentielle vaut* 1, *donc* $\underline{\ln(1) = 0} \iff 1 = e^0$.
- $\ln(e)$ *est le nombre dont l'exponentielle vaut* e, *donc* $\underline{\ln(e) = 1} \iff e = e^1$.

Propriété *Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation d :* $y = x$.



Démonstration: C'est une propriété des courbes de fonctions sont réciproques l'une de l'autre, cf. exercice 2. □

Exercice 3 Résoudre les équations : • $e^x = 5$ • $\ln(x) = -5$ • $\ln(2x-1) = -2$ • $\ln(1+x) = 100$

Exercice 4 Étudier le signe des expressions : a) $\ln(x-1)$ b) $\ln\left(\dfrac{x^2}{5x-6}\right)$

II - Propriétés algébriques de la fonction ln

Théorème ***Relation fondamentale du ln.*** *Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.*

Démonstration: Soit $a>0$ et $b>0$, alors $e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}e^{\ln(b)}=ab$ et $e^{\ln(ab)}=ab$.

On en déduit que $e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(ab)}$, et donc, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$. $\square$

Corollaire *Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, et tout entier naturel n,*

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
3. $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$
4. $\ln\left(a^{-n}\right)=-n\ln(a)$
5. $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration: 1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)+\ln(a)=\ln\left(\dfrac{1}{a}\times a\right)=\ln(1)=0$ d'où le résultat.

2. Comme $\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$, on a $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.
3. On cherche à démontrer une propriété pour tout entier n, on pense (bien sûr ?!) à une récurrence. On note donc P_n la propriété $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$.
   Initialisation : Pour $n=0$, $a^0=1$ pour tout $a>0$ et $\ln(a^0)=\ln(1)=0$ qui est bien égal à $0\ln(a)=0$, et P_0 est donc vraie.
   Hérédité : Suposons maintenant P_n vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$.
   Alors, on a $\ln\left(a^{n+1}\right)=\ln\left(a^n\times a\right)=\ln\left(a^n\right)+\ln(a)$
   et alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence $\ln\left(a^{n+1}\right)=n\ln(a)+\ln(a)=(n+1)\ln(a)$,
   ce qui montre que P_{n+1} est alors aussi vraie.
   Conclusion : On vient donc de démontrer, grâce au principe de récurrence, que la propriété P_n : $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$ est vraie pour tout entier n.
4. On a simplement $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ et donc, avec le résultat précédent, $\ln\left(a^{-n}\right)=-\ln\left(a^n\right)=-n\ln(a)$.
5. Pour $a>0$, d'une part $\ln\left(\sqrt{a}^2\right)=\ln(a)$, et d'autre part, $\ln\left(\sqrt{a}^2\right)=2\ln(\sqrt{a})$.
   On a donc $2\ln(\sqrt{a})=\ln(a)$ d'où le résultat.

$\square$

Remarque : On a donc, pour tout réel $a>0$, $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)=\ln(a^{\frac{1}{2}})$, d'où la notation $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5 a) Déterminer $\ln(2)+\ln(4)+\ln(8)+\ln(16)$ en fonction de $\ln(2)$.

a) Déterminer $\ln(3)+\ln(27)+\ln(81)$ en fonction de $\ln(3)$.

b) Simplifier les expressions : $\ln\left(5^2\times 2^5\right)$ et $\ln\left(12\left(3^6\right)^2\right)$

c) Exprimer en fonction de $\ln(x)$ les expressions suivantes : $A(x)=\ln\left(3x^2\right)$; $B(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)+\ln\left(x^2\right)$;
$C(x)=\ln(x+4)-\ln\left(4x+x^2\right)$; $D(x)=\ln\left(x^3-x^2\right)-\ln(x-1)$; $E(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-\ln(2x)$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{N}$, les inéquations suivantes : a) $3^n>125$ b) $5^n\leqslant 10\,000$
c) $0,5^n<0,001$ d) $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n>10^5$ e) $2^{n-5}>3000$ f) $1-0,3^n>0,95$ g) $\dfrac{4^n}{5^{n-1}}>1$

Exercice 7 QCM

1. Le nombre $\ln(125)$ est égale à :
   a) $5\ln(3)$ b) $25\ln(5)$
   c) $3\ln(5)$ d) $5\ln(25)$

2. Le plus grand intervalle de définition de la fonction $f:x\mapsto\ln\left(x^2+x+1\right)$ est :
   a) $]0;+\infty[$ b) $]-\infty;0[$
   c) $[0;1]$ d) $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x, $\ln\left(x^2\right)=2\ln(x)$:
   a) Vrai
   b) Faux

4. L'expression $\ln\left(\sqrt{2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln(7)$ est égale à :

a) $\ln(\sqrt{14})$ b) $\dfrac{1}{2}\ln(14)$

c) $\dfrac{1}{2}\ln(9)$ d) $\ln(7)$

5. L'inéquation $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)x-1>3$ équivaut à :

a) $x>\dfrac{4}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$ b) $x\geqslant\dfrac{4}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

c) $x<\dfrac{4}{\ln(2)-\ln(3)}$ d) $x>4-\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

Exercice 8 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q=1,5$ et de premier terme $u_0=2$. Quel est le sens de variation de (u_n) ? Quelle est sa limite ? Á partir de quel rang a-t-on $u_n>120$?

Exercice 9 Je possède 1000 euros sur un compte en banque. Chaque année ce compte me rapporte 4% d'intérêts (intérêts composés : chaque année le capital de l'année précédente est augmenté de 4%). Au bout de combien d'années le montant sur ce compte aura-t-il doublé ? triplé ?

Exercice 10 Soit f la fonction définie par l'expression $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f, et montrer que sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

III - Étude de la fonction ln

Propriété *La fonction* ln *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$, *et pour tout* $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration: On admet que la fonction ln est dérivable (et donc aussi continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=e^{\ln(x)}$.
Par définition du logarithme, pour tout $x>0$, $f(x)=x$, et en particulier, $f'(x)=1$.
Par ailleurs, en dérivant la fonction composée $f=e^u$, on obtient : $f'(x)=\ln'(x)e^{\ln(x)}=\ln'(x)\,x$.
On en déduit que $\ln'(x)\,x=1$, soit, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. □

Propriété

1. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$
2. *Pour tous* $a>0$ *et* $b>0$, *on a* $\ln(a)=\ln(b)\iff a=b$ *et* $\ln(a)<\ln(b)\iff a<b$.
3. *La courbe de la fonction* ln *est concave*
4. $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
   En d'autres termes, la droite $x=0$ *(l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale.*
5. *Pour toute fonction* u *dérivable et strictement positive, on a* $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

Démonstration: 1. $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ pour $x>0$ d'où le sens de variation.

2. C'est une conséquence directe du point précédent : f strictement croissante si et seulement si f conserve l'ordre.
3. ln est deux fois dérivable, avec $\ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ pour tout $x>0$, d'où la concavité.
4. En $+\infty$. Pour A un nombre réel quelconque, aussi grand que l'on veut, il suffit de choisir $x>e^A$ pour avoir $\ln(x)>A$, puisque ln est strictement croissante.
   Ceci signifie exactement que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

   En 0. Pour $x>0$, on pose $X=\dfrac{1}{x}$. Alors, $\ln(x)=\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=-\ln(X)$.

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\Big(-\ln(X)\Big)=-\infty$.

5. C'est la formule de la dérivée d'une fonction composée : $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$, avec $f = \ln$ et $g = u$.

$\square$

Exercice 11 Résoudre : • $\ln(x+1) = 1$ • $\ln(x^2+6x+10) = 0$ • $\ln(x) \geqslant 1$ • $\ln(x^2+1) \leqslant 1$
• $e^{3x-1} = 3$ • $\dfrac{1}{e^{x-2}} = \sqrt{3}$ • $e^{-4x+2} - 5 = 0$ • $e^{x^2-4} \leqslant 1$ • $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$
• $\ln(x^2 - 3) \leq \ln(x) + \ln(2)$ • $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 = 0$ • $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 > 0$
• $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ • $e^{2x} - 6e^x + 4 = 0$ • $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$

Exercice 12 Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues x et y

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \ln(x) & + & \ln(y) & = & 25 \\ 2\ln(x) & + & \ln(y) & = & 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 3e^x & + & e^y & = & 4 \\ e^x & - & 2e^y & = & -5 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \ln\left(x\sqrt{y}\right) & = & 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 13

a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction ln aux points d'abscisse 1 et e.

b) Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux tangentes.

c) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Exercice 14 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x) = \ln(x^2)$; $g(x) = \ln(5x+2)$; $h(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $k(x) = 2\ln(\sqrt{x})$; $l(x) = \dfrac{3}{2}\ln(e^{2x+1} + 3)$; $m(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$; $n(x) = -3x\ln(e^x + 1)$

Exercice 15 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + 2}{\ln(x) - 1}$.

Exercice 16 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

Exercice 17 Étudier la fonction définie pour tout $x > -1$ par $f(x) = \ln(x+1) + x^2 + x + 1$

Exercice 18 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \Big(\ln(x)\Big)^2$.

Exercice 19 Etudier la fonction f définie par l'expression $f(x) = \ln(\ln(x))$.

Exercice 20 On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^2$. On note de plus rexpectivement M_x et N_x les points de C_f et C_g d'abscisse x. Représenter graphiquement la situation. Pour quelle(s) valeur(s) de x la distance M_xN_x est-elle minimale ?

Propriété ***Croissances comparées***

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \ \ et \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

ou, plus généralement, pour tout entier naturel $n > 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} x^n\ln(x) = 0 \ \ et \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Démonstration: On se ramène au théorème de croissances comparées pour l'exponentielle en posant $X = \ln(x) \iff e^X = x$, et alors $x\ln(x) = Xe^X$, d'où

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$$

On passe ensuite de la limite en 0 à celle en $+\infty$ en posant cette fois $X = \dfrac{1}{x}$ et alors

$$\frac{\ln(x)}{x} = X \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -X\ln(X)$$

d'où, d'après le résultat précédent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to 0} -X\ln(X) = 0$. $\square$

Exercice 21 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \ln(2)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et justifier que $\alpha \in \left[1;\dfrac{5}{4}\right[$.
5. Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 22 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$par $f(x) = (-x+3)\ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{3}{x} - 1 - \ln(x)$.

Partie A.

1. Calculer la dérivée g' de g et en déduire les variations de g.
2. Calculer $g(1)$ et $g(2)$ et en déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B. Calculer la dérivée f' de f et en déduire les variations de f.

Exercice 23 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln(x)$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.
   b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire les variations de f.
   b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f, puis tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 24 Soit u la suite définie pour tout $n > 0$ par $\displaystyle u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

I. Caculer u_1 et u_2, puis démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)}$.

II. *Etude de la convergence de la suite u*

a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul p, $\dfrac{1}{p+1} \leq \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p}$

III. Soit n un entier naturel non nul.

a) Ecrire l'encadrement précédent pour les valeurs n, $n+1$, ..., $2n-1$ de p.

b) En effectuant les sommes membre à membre des inégalités obtenues, démontrer que

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

IV. Prouver alors que la suite u converge vers $\ln(2)$.

Exercice 25 Soit f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = x^x$.

1. Justifier que $f(x) = e^{x\ln(x)}$.
2. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (1 + \ln(x))\ f(x)$. En déduire les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

IV - Logarithme décimal

Définition *La fonction logarithme décimal, notée* $\log$, *est définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriété
- $\log(1) = 0$, $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$ *et donc* $\log(10^n) = n\log(10)n$.
- *Comme* $\log(x) = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \ln(x)$, *on a* $\log'(x) = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \dfrac{1}{x}$, *où* $\ln(10) > 0$.
- *Pour tous réels* $a > 0$ *et* $b > 0$, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
- *Pour tout réel* $a > 0$, $\log(a^n) = n\log(a)$.

  En particulier, lorsque $a = 10$, $\log(10^n) = n\log(10) = n$.
  $n = \log a$ *équivaut à* $a = 10^n$ *: le logarithme décimal "compte les puissances de 10".*

Le logarithme décimale est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$ ***:***
$\log(x) = y \iff x = 10^y$ ***et*** $\log(10^x) = x$

Exercice 26 **Echelle de Richter** La magnitude d'un séisme, sur l'échelle de Richter, est évaluée à partir de l'amplitude A des ondes sismiques enregistrées sur un sismographe par la formule $M = \log(A) - \log(A_0)$, où A_0 désigne l'amplitude d'un séisme de référence.

1. On a mesuré l'amplitude d'un séisme et on a obtenu $A = 3,98\,10^7\,A_0$.
   Calculer la magnitude de ce séisme sur l'échelle de Richter.
2. La magnitude d'un séisme est 5. Déterminer le rapport $\dfrac{A}{A_0}$ de son amplitude à l'amplitude de référence.
3. A quelle variation d'amplitude correspond une variation de magnitude de 1 sur l'échelle de Richter.

Exercice 27 **pH d'une solution** La molarité en ions H^+ d'une solution est le nombre, noté $[H^+]$ de moles par litre d'ions H^+. $[H^+]$ s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 (10^{-5} mol.L^{-1} par exemple). On lui préfère donc le pH défini par pH$= -\log([H^+])$.

1. Quel est le pH d'un solution contenant $3\,10^{-7}$ moles d'ions H^+ par litre ?
2. Quelle est la molarité en ions H^+ d'une solution neutre (pH$= 7$) ?

V - Exponentielle de base a

Définition *La fonction exponentielle de base* $a > 0$ *est définie pour* $x > 0$ *par* $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$.

Remarque : la fonction exponentielle "naturelle" est la fonction exponentielle de base le nombre e.

Exercice 28 Étudier les fonctions f et g définies pour $x > 0$ par $f(x) = 0,5^x$ et $g(x) = 5^x$. Tracer, sur un même graphique, l'allure de leur courbe représentative ainsi que la courbe de la fonction exponentielle.