

# Logarithme népérien - Exercices

Terminale générale  
spécialité maths

**Exercice 1** On se place dans un RON, et on note  $d$  la droite d'équation  $y = x$ .

- On considère les points  $M(x; y)$  et  $M'(y, x)$ .
  - Donner un vecteur directeur de  $d$  et montrer que  $\overrightarrow{MM'}$  est orthogonal à  $d$ .
  - Montrer que les points  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à la droite  $d$ .
- On considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction carré :  $x \mapsto x^2$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$ .
  - Soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{C}$ . Préciser ses coordonnées et celles de son symétrique  $M'$  par rapport à  $d$ .
  - Lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$ , la courbe de quelle fonction est décrite par  $M'$ ? Quel lien y-a-t'il entre la fonction carré et cette fonction?

**Exercice 2** 1. Résoudre les équations : •  $e^x = 1$  •  $e^x = e$  •  $e^x = \frac{1}{e}$

- Montrer que pour tout réel strictement positif  $\lambda$ , l'équation  $e^x = \lambda$  admet une unique solution.
- Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la solution de l'équation  $e^x = 2$ .

**Exercice 3** Résoudre les équations : •  $e^x = 5$  •  $\ln(x) = -5$  •  $\ln(2x-1) = -2$  •  $\ln(1+x) = 100$

**Exercice 4** Étudier le signe des expressions : a)  $\ln(x-1)$  b)  $\ln\left(\frac{x^2}{5x-6}\right)$

**Exercice 5** a) Déterminer  $\ln(2) + \ln(4) + \ln(8) + \ln(16)$  en fonction de  $\ln(2)$ .

a) Déterminer  $\ln(3) + \ln(27) + \ln(81)$  en fonction de  $\ln(3)$ .

b) Simplifier les expressions :  $\ln(5^2 \times 2^5)$  et  $\ln(12(3^6)^2)$

c) Exprimer en fonction de  $\ln(x)$  les expressions suivantes :  $A(x) = \ln(3x^2)$ ;  $B(x) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(x^2)$ ;  $C(x) = \ln(x+4) - \ln(4x+x^2)$ ;  $D(x) = \ln(x^3-x^2) - \ln(x-1)$ ;  $E(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(2x)$

**Exercice 6** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $\mathbb{N}$ , les inéquations suivantes : a)  $3^n > 125$  b)  $5^n \leq 10\,000$

c)  $0,5^n < 0,001$  d)  $\left(\frac{9}{10}\right)^n > 10^5$  e)  $2^{n-5} > 3000$  f)  $1 - 0,3^n > 0,95$  g)  $\frac{4^n}{5^{n-1}} > 1$

**Exercice 7** QCM

- Le nombre  $\ln(125)$  est égale à :
  - $5 \ln(3)$
  - $25 \ln(5)$
  - $3 \ln(5)$
  - $5 \ln(25)$
- Le plus grand intervalle de définition de la fonction  $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$  est :
  - $]0; +\infty[$
  - $] - \infty; 0[$
  - $[0; 1]$
  - $\mathbb{R}$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$  :
  - Vrai
  - Faux

4. L'expression  $\ln(\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \ln(7)$  est égale à :

- $\ln(\sqrt{14})$
- $\frac{1}{2} \ln(14)$
- $\frac{1}{2} \ln(9)$
- $\ln(7)$

5. L'inéquation  $\ln\left(\frac{2}{3}\right)x - 1 > 3$  équivaut à :

- $x > \frac{4}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$
- $x \geq \frac{4}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$
- $x < \frac{4}{\ln(2) - \ln(3)}$
- $x > 4 - \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

**Exercice 8** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q = 1,5$  et de premier terme  $u_0 = 2$ . Quel est le sens de variation de  $(u_n)$ ? Quelle est sa limite? Á partir de quel rang a-t-on  $u_n > 120$ ?

**Exercice 9** Je possède 1000 euros sur un compte en banque. Chaque année ce compte me rapporte 4% d'intérêts (intérêts composés : chaque année le capital de l'année précédente est augmenté de 4%). Au bout de combien d'années le montant sur ce compte aura-t-il doublé? triplé?

**Exercice 10** Soit  $f$  la fonction définie par l'expression  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , et montrer que sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

**Exercice 11** Résoudre : •  $\ln(x+1) = 1$  •  $\ln(x^2+6x+10) = 0$  •  $\ln(x) \geq 1$  •  $\ln(x^2+1) \leq 1$

•  $e^{3x-1} = 3$  •  $\frac{1}{e^{x-2}} = \sqrt{3}$  •  $e^{-4x+2} - 5 = 0$  •  $e^{x^2-4} \leq 1$  •  $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

•  $\ln(x^2-3) \leq \ln(x) + \ln(2)$  •  $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 = 0$  •  $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 > 0$

•  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$  •  $e^{2x} - 6e^x + 4 = 0$  •  $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$

**Exercice 12** Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues  $x$  et  $y$

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 25 \\ 2\ln(x) + \ln(y) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3e^x + e^y = 4 \\ e^x - 2e^y = -5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) = 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) = 0 \end{cases}$$

**Exercice 13**

a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $\ln$  aux points d'abscisse 1 et  $e$ .

b) Tracer dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  et ses deux tangentes.

c) Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln(x) \leq x - 1$ .

**Exercice 14** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :  $f(x) = \ln(x^2)$ ;  $g(x) = \ln(5x+2)$ ;

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right); k(x) = 2\ln(\sqrt{x}); l(x) = \frac{3}{2}\ln(e^{2x+1}+3); m(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right); n(x) = -3x\ln(e^x+1)$$

**Exercice 15** Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de  $f : x \mapsto \frac{\ln(x)+2}{\ln(x)-1}$ .

**Exercice 16** Etudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ .

**Exercice 17** Étudier la fonction définie pour tout  $x > -1$  par  $f(x) = \ln(x+1) + x^2 + x + 1$

**Exercice 18** Etudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = (\ln(x))^2$ .

**Exercice 19** Etudier la fonction  $f$  définie par l'expression  $f(x) = \ln(\ln(x))$ .

**Exercice 20** On note  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \ln(x)$  et  $g(x) = x^2$ . On note de plus respectivement  $M_x$  et  $N_x$  les points de  $C_f$  et  $C_g$  d'abscisse  $x$ . Représenter graphiquement la situation. Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  la distance  $M_xN_x$  est-elle minimale?

**Exercice 21** Soit  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - \ln(2)$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .  
b) Etudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\Delta$ .
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et justifier que  $\alpha \in \left[1; \frac{5}{4}\right]$ .
5. Tracer  $\Delta$  et  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 22** Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = (-x+3)\ln(x)$  et  $g(x) = \frac{3}{x} - 1 - \ln(x)$ .

**Partie A.**

1. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  et en déduire les variations de  $g$ .
2. Calculer  $g(1)$  et  $g(2)$  et en déduire qu'il existe un unique  $\alpha \in ]0; +\infty[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**Partie B.** Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  et en déduire les variations de  $f$ .

**Exercice 23** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln(x)$  et on note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x - 1 + \ln(x)$ .  
b) Vérifier que  $g(1) = 0$ . En déduire, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $g(x)$ .
2. a) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ . En déduire les variations de  $f$ .  
b) Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
c) Dresser le tableau de variation de  $f$ , puis tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 24** Soit  $u$  la suite définie pour tout  $n > 0$  par  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .

I. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ , puis démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ .

II. *Etude de la convergence de la suite  $u$*

- a) Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$
- b) En déduire que pour tout entier naturel non nul  $p$ ,  $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

III. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- a) Ecrire l'encadrement précédent pour les valeurs  $n, n+1, \dots, 2n-1$  de  $p$ .
- b) En effectuant les sommes membre à membre des inégalités obtenues, démontrer que

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

IV. Prouver alors que la suite  $u$  converge vers  $\ln(2)$ .

**Exercice 25** Soit  $f$  la fonction définie pour  $x > 0$  par  $f(x) = x^x$ .

1. Justifier que  $f(x) = e^{x \ln(x)}$ .
2. Calculer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = (1 + \ln(x)) f(x)$ . En déduire les variations de  $f$  et tracer l'allure de sa courbe représentative.

**Exercice 26 Echelle de Richter** La magnitude d'un séisme, sur l'échelle de Richter, est évaluée à partir de l'amplitude  $A$  des ondes sismiques enregistrées sur un sismographe par la formule  $M = \log(A) - \log(A_0)$ , où  $A_0$  désigne l'amplitude d'un séisme de référence.

1. On a mesuré l'amplitude d'un séisme et on a obtenu  $A = 3,98 \cdot 10^7 A_0$ .  
Calculer la magnitude de ce séisme sur l'échelle de Richter.
2. La magnitude d'un séisme est 5. Déterminer le rapport  $\frac{A}{A_0}$  de son amplitude à l'amplitude de référence.
3. A quelle variation d'amplitude correspond une variation de magnitude de 1 sur l'échelle de Richter.

**Exercice 27 pH d'une solution** La molarité en ions  $H^+$  d'une solution est le nombre, noté  $[H^+]$  de moles par litre d'ions  $H^+$ .  $[H^+]$  s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 ( $10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$  par exemple). On lui préfère donc le pH défini par  $\text{pH} = -\log([H^+])$ .

1. Quel est le pH d'une solution contenant  $3 \cdot 10^{-7}$  moles d'ions  $H^+$  par litre ?
2. Quelle est la molarité en ions  $H^+$  d'une solution neutre ( $\text{pH} = 7$ ) ?

**Exercice 28** Étudier les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour  $x > 0$  par  $f(x) = 0,5^x$  et  $g(x) = 5^x$ .

Tracer, sur un même graphique, l'allure de leur courbe représentative ainsi que la courbe de la fonction exponentielle.