

Comportement asymptotique des fonctions

Terminale générale
spécialité maths

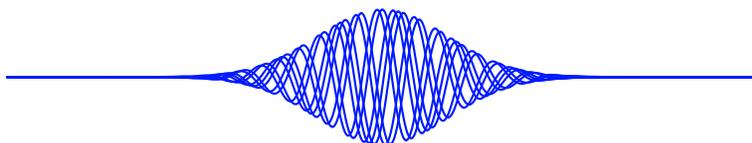
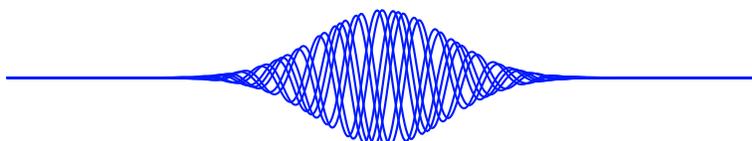


Table des matières

I	Un exemple complet	2
II	Limite d'une fonction à l'infini	2
	1) Limite en $+\infty$	2
	2) Limite en $-\infty$	3
	3) Limites en l'infini des fonctions de référence	4
III	Limite en un point	4
IV	Opérations sur les limites	5
	1) Limite d'une somme	5
	2) Limite d'un produit	5
	3) Limite d'un quotient	5
	4) Formes indéterminées	6
	5) Composition de fonctions	6
V	Formes indéterminées	7
VI	Croissances comparées	8
VII	Théorème de comparaison	9
VIII	Asymptote oblique	10



I Un exemple complet

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	\emptyset	+
$f'(x)$	+	\parallel	+
$f(x)$	\nearrow	\parallel	\nearrow

Que se passe-t-il lorsque x se rapproche de -1 ? Comment se comporte $f(x)$?

Et lorsque x devient de plus en plus grand, c'est-à-dire se rapproche de $+\infty$ ou $-\infty$?

En $+\infty$ et $-\infty$: Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, positivement ou négativement, x et $x+1$ sont "très proches", et ainsi, $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ devient proche de $\frac{2x}{x} = 2$.

On écrit alors, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

En -1 : lorsque x se rapproche de -1 , $2x$ se rapproche de -2 , et $x+1$ se rapproche de 0 .

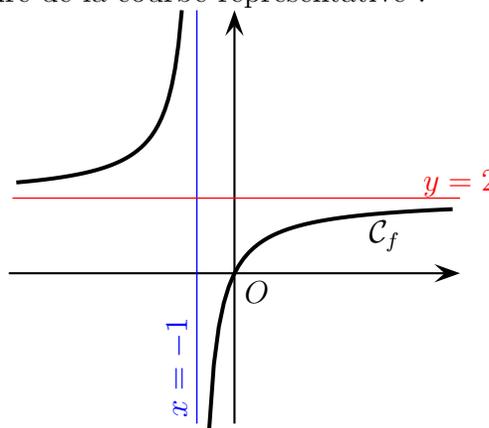
Si x se rapproche de -1 , avec $x > -1$, alors $x+1 > 0$ et $\frac{2x}{x+1}$ se rapproche de $\frac{-2}{x+1}$ donc de $-\infty$.

Si x se rapproche de -1 , avec $x < -1$, alors $x+1 < 0$ et $\frac{2x}{x+1}$ se rapproche de $+\infty$.

On écrit : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$.

On peut alors compléter le tableau de variations, et tracer l'allure de la courbe représentative :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	\emptyset	+
$f'(x)$	+	\parallel	+
$f(x)$	\nearrow	\parallel	\nearrow
	2	$+\infty$	$-\infty$
			2

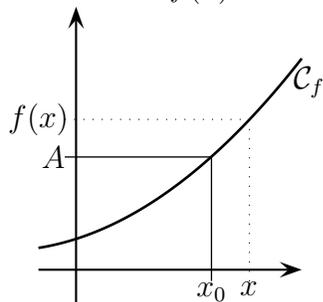


II Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, on dit lorsque x tend vers $+\infty$, quatre cas peuvent se présenter :

a) les nombres $f(x)$ deviennent eux aussi "infiniment grands" :



Tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

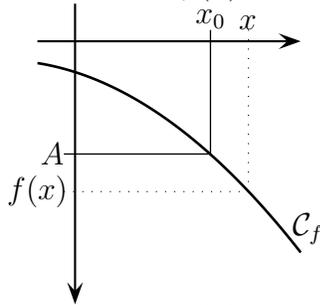
Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$ alors $f(x) > A$:

les nombres $f(x)$ peuvent plus grands que n'importe quel nombre A , dès qu'on choisit x assez grand.

Exemple : Soit $f(x) = x^2$ la fonction carré.

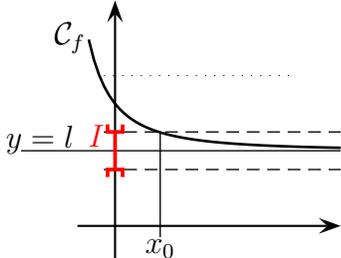
Pour tout $A > 0$, dès que $x > x_0 = \sqrt{A}$, $f(x) = x^2 > A$, donc, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement



Pour tout nombre $A < 0$, aussi grand soit-il (négativement), on peut avoir $f(x) < A$, dès que on choisit x assez grand.
On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

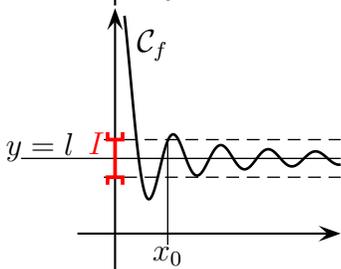
c) Les nombres $f(x)$ s'accroissent autour d'une valeur l :



Tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle I contenant l , il existe un réel x_0 tel que pour si $x > x_0$ alors $f(x) \in I$.

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

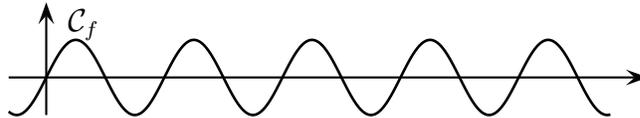


On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

On peut aussi écrire, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$: lorsque x tend vers $+\infty$, la distance entre C_f et l'asymptote $y = l$ tend vers 0.

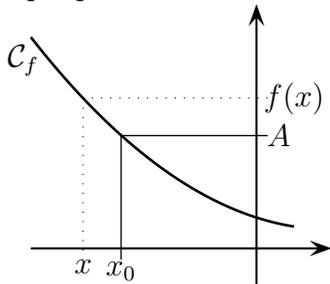
d) Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.

Par exemple, $f(x) = \sin x$

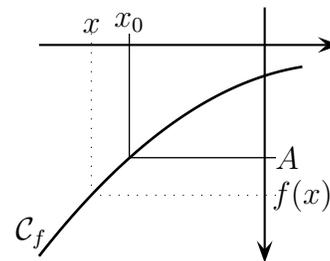


2) Limite en $-\infty$

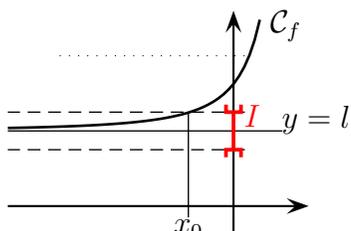
De même que pour la limite en $+\infty$, quatre cas sont possibles :



Tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment grand négativement. On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.



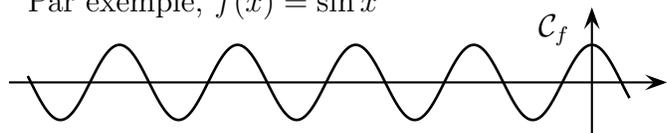
Tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment grand négativement. On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



Tout intervalle ouvert contenant l contient $f(x)$ pour x suffisamment grand négativement. On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.

Par exemple, $f(x) = \sin x$



3) Limites en l'infini des fonctions de référence

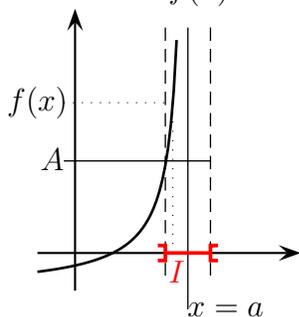
$f(x)$	\sqrt{x}	x^2	$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\cos x$ $\sin x$	e^x
Limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	×	$+\infty$
Limite en $-\infty$	×	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	×	0

Les limites de la fonctions exponentielles seront démontrées un peu plus tard dans ce cours, patience ...

III Limite en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , trois cas peuvent se présenter :

a) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand :

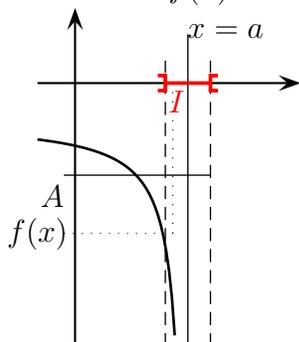


Tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à \mathcal{C}_f .

b) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement :

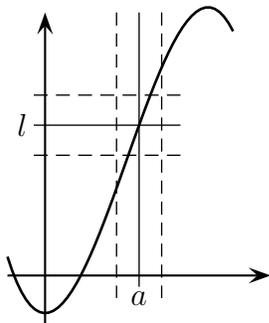


Tout intervalle ouvert de la forme $] - \infty; A[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à \mathcal{C}_f .

c) les nombres $f(x)$ se rapprochent du (s'accumulent autour du) nombre l



$f(x)$ se rapproche aussi proche de l que voulu pourvu que x soit suffisamment proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Si f est définie en a et que $f(a) = l$, on donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, et la fonction est continue en a .

Définition Si f est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue en a .

Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I .

Propriété *Continuité des fonctions usuelles*

Les fonctions usuelles : les fonctions puissances $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction racine carrée, la fonction inverse, les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles, les fonctions cosinus et sinus, sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque : Une fonction rationnelle est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes.

Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{8x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 27x + 127}{x^2 - 7x + 12}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$, donc aussi continues en tout réel $a \neq 3$ et $a \neq 4$: pour tout réel $a \in \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{107}{6}$.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 Déterminer les limites à gauche et à droite en 3 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 3? Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$
 Déterminer les limites à gauche et à droite en -1 : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en -1 ? Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .

IV Opérations sur les limites

Les résultats concernant les opérations sur les limites des suites sont applicables aux limites de fonctions.

1) Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	✗

2) Limite d'un produit

Limite de f	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de fg	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	✗

3) Limite d'un quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de g	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	✗	✗

4) Formes indéterminées

Les formes indéterminées nécessitent une étude particulière. Elles sont au nombre de quatre :

$$“ +\infty - \infty “ \quad “ 0 \times \infty “ \quad “ \frac{\infty}{\infty} “ \quad “ \frac{0}{0} “$$

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 - 6 & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{(x-3)^2} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \frac{3}{e^x} + \frac{2x^2}{+} x^3 & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \frac{x}{e^x} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{e^x - 1} & \end{array}$$

Exercice 4 *Vrai ou faux* (Donner un contre exemple lorsque la proposition est fausse)

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

- Montrer que si $x \neq 2$ et $1,9 < x < 2,1$, alors $f(x) > 100$.
- Soit A un réel strictement positif. Déterminer un intervalle ouvert I contenant 2 tel que si $x \in I$ alors $f(x) > A$.
- Que peut-on déduire en termes de limite pour la fonction f ?

Exercice 6 Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f .

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -6 & \text{d)} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty & \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty & \end{array}$$

Exercice 7 Déterminer les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et préciser l'équation de l'éventuelle asymptote :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} \text{ en } 0, \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty & \text{b)} f(x) = (4 - x^2)(3x - 2) \text{ en } 0, \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty \\ \text{c)} f(x) = 4x - 1 + \frac{1}{x-3} \text{ en } 3, \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty & \text{d)} f(x) = \frac{4x}{4-x} \text{ en } 0 \text{ et en } 4 \end{array}$$

5) Composition de fonctions

Définition Soit f et g deux fonctions.

On appelle fonction composée de g par f la fonction $x \mapsto f(g(x))$.

Propriété a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 2}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 2) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4 \quad \text{c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x^2+1}$$

Rappel : La dérivée de la fonction composée $h(x) = f(g(x))$ est $h'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

Par exemple, soit $h(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Alors h est la composée de $g : x \mapsto x^2 + 3$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$, c'est-à-dire que $h(x) = \sqrt{g(x)} = f(g(x))$.

$$\text{On a } g'(x) = 2x \text{ et } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ et donc, } h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Exercice 9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \sqrt{2x^3 - 3x + 1} & \text{b) } f(x) &= (2x + 3)^5 & \text{c) } f(x) &= e^{2x-3} \\ \text{d) } f(x) &= \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}} & \text{e) } f(x) &= \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^7 & \text{f) } f(x) &= \frac{1}{1 + e^{-0,5x^2+1}} \end{aligned}$$

Exercice 10 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'intéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0; 1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entrée dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. a) Etudier les variations de la température T sur $[0; 1]$.
b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T .

Exercice 11 Etudier sur \mathbb{R} les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

$$\text{a) } f(x) = e^{-x} \quad \text{b) } g(x) = e^x + e^{-x} \quad \text{c) } h(x) = x + e^x \quad \text{d) } k(x) = e^{-x^2}$$

V Formes indéterminées

Méthode en cas de forme indéterminée : On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)

Exemple 1 : limite en $+\infty$ d'un polynôme. Par exemple, la limite en $+\infty$ de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$, et on ne peut donc pas directement appliquer la règle de calcul sur la limite de la somme (forme indéterminée " $+\infty - \infty$ "). Néanmoins, en $+\infty$, x^3 croît plus rapidement que $2x^2$: x^3 est prépondérant devant $2x^2$.

$$\text{On factorise alors par ce terme prépondérant : } f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right) = x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right),$$

$$\text{et on a : } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ par produit des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exemple 2 : Limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle. Par exemple, $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3 + 4}$.

Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes. On peut donc appliquer au numérateur et au dénominateur la démarche précédente :

$$f(x) = \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{2x^3 \left(1 + \frac{3}{x^3}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^3}}$$

et on a :
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^3}\right) = 1 \end{array} \right\} \text{ par produit et quotient des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 3)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x + 2}{3x - 7}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 2x}{3x^3 - 7}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x + 2}{x - 3}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x + 2}{x - 3}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 13 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

b. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f(x) = x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 Soit f la fonction $x \mapsto \frac{ax + b}{2x - 1}$ où a et b sont deux réels. f est représentée par la courbe \mathcal{C} dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer a et b tels que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
2. Déterminer les asymptotes à \mathcal{C} .
3. Dresser le tableau de variation de f , et tracer l'allure de \mathcal{C} .

VI Croissances comparées

Exercice 15 Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

- a) Dresser le tableau de variation de φ' .
- b) En déduire le signe de φ' puis les variations de φ .
- c) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $e^x \geq \frac{x^2}{2}$.
- d) Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\frac{e^x}{x}$.

Propriété Croissance comparée en l'infini de l'exponentielle et des polynômes

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ et plus généralement } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ pour tout entier } n$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \text{ et plus généralement } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \text{ pour tout entier } n$$

En d'autres termes, l'exponentielle est prépondérante en l'infini devant les polynômes.

Exercice 16 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^2 + 2 - e^x & \text{b) } g(x) = \frac{2e^x - x}{x^2} & \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \\ \text{d) } l(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x & \text{e) } k(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x} & \text{f) } t(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 3} \end{array}$$

Exercice 17 Étudier (sens de variations et limites) sur \mathbb{R} les fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = e^{3x} - 3e^x \quad \text{b) } g(x) = (0,4x - 2)e^{-0.1x}$$

VII Théorème de comparaison

Théorème Théorème des gendarmes pour les fonctions

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que, pour tout x de I , $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

Si de plus $a \in I$ (éventuellement $a = +\infty$) et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

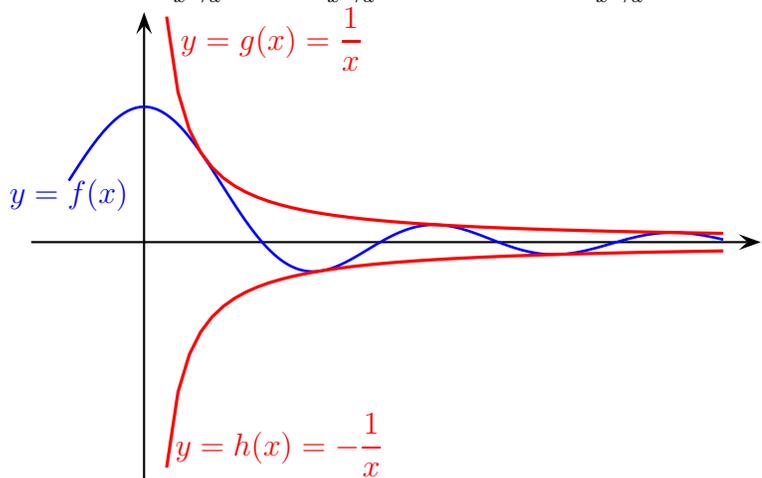
Exemple : Soit une fonction f telle que,

$$\text{pour tout } x > 0, -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Alors,

$$\text{comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$



Corollaire Soit f et g deux fonctions telles que pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$, et $a \in I$,

- si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$,
- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$,

Exercice 18 Vrai ou faux

a. Si pour tout réel x , $f(x) \geq x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 19 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{1}{x} \sin(x)$.

Exercice 20 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = e^x - x$.

- Dresser le tableau de variation de f .
- En déduire le signe de $f(x)$ puis que, pour tout $x \geq 0$, $e^x > x$.
- Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.

VIII Asymptote oblique

Exercice 21 Soit f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$.
- Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x + 1)$.
- Quelle propriété peut-on en déduire quant à \mathcal{C}_f et la droite $\Delta : y = x + 1$?
Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 22 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par l'expression $f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x + 2}$.

Montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f .

Exercice 23 Soit g la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

- Dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1.
- Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \in D$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .

Exercice 24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

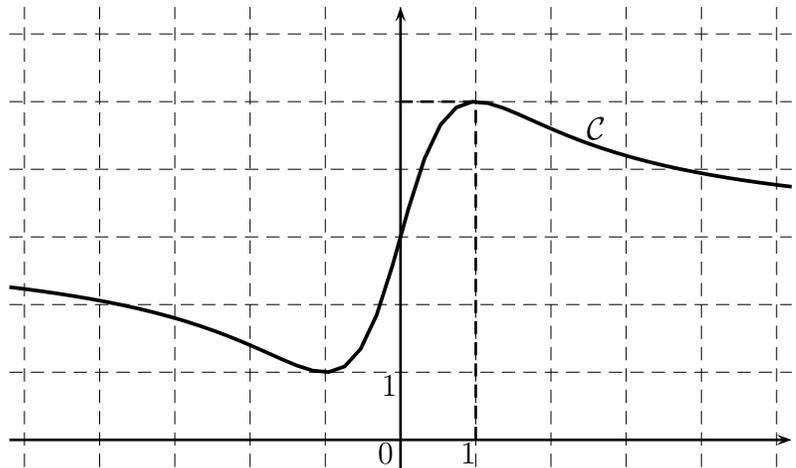
- Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .
- Représenter graphiquement ces résultats.

Exercice 25 Exercice type Bac

Partie A. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ dont la courbe représentative \mathcal{C} est donnée ci-contre.

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à \mathcal{C} en plus et moins l'infini.

Grâce aux renseignements donnés par le graphique, déterminer les réels a , b et c .



Partie B. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x , $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 + 1}$.
2. Dresser le tableau de variation complet de f .
3. Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.
4. a. Montrer que pour tout réel x , $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 3$.
b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
(Indication : Considérer les points $M(x; f(x))$, $M(-x, f(-x))$ et $I(0; 3)$)

Partie C. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(|x|) = \frac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer la limite de g en moins l'infini.
2. expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de celle de f .

Exercice 26 Déterminer les limites : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right)$