

Comportement asymptotique des fonctions - Exercices

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
Déterminer les limites à gauche et à droite en 3 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 3 ? Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$
Déterminer les limites à gauche et à droite en -1 : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en -1 ? Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 - 6$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{(x-3)^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right)$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \frac{3}{e^x} + \frac{2x^2}{+} x^3$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \frac{x}{e^x}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{e^x - 1}$

Exercice 4 *Vrai ou faux* (Donner un contre exemple lorsque la proposition est fausse)

- a. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
b. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = +\infty$
c. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

- a. Montrer que si $x \neq 2$ et $1,9 < x < 2,1$, alors $f(x) > 100$.
b. Soit A un réel strictement positif. Déterminer un intervalle ouvert I contenant 2 tel que si $x \in I$ alors $f(x) > A$.
c. Que peut-on déduire en termes de limite pour la fonction f ?

Exercice 6 Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f .

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -6$ d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 7 Déterminer les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et préciser l'équation de l'éventuelle asymptote :

a) $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ b) $f(x) = (4 - x^2)(3x - 2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$
c) $f(x) = 4x - 1 + \frac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ d) $f(x) = \frac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x^2+1}$

Exercice 9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x + 1}$ b) $f(x) = (2x + 3)^5$ c) $f(x) = e^{2x-3}$
d) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}$ e) $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^7$ f) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,5x^2+1}}$

Exercice 10 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'intéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0; 1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entrée dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

- Déterminer la température à l'entrée du capteur.
- a) Etudier les variations de la température T sur $[0; 1]$.
b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T .

Exercice 11 Etudier sur \mathbb{R} les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = e^x + e^{-x}$ c) $h(x) = x + e^x$ d) $k(x) = e^{-x^2}$

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 3)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^3-7}$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 13 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$.

a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

b. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f(x) = x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 Soit f la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. f est représentée par la courbe \mathcal{C} dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer a et b tels que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- Déterminer les asymptotes à \mathcal{C} .
- Dresser le tableau de variation de f , et tracer l'allure de \mathcal{C} .

Exercice 15 Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

- Dresser le tableau de variation de φ' .
- En déduire le signe de φ' puis les variations de φ .

c) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $e^x \geq \frac{x^2}{2}$.

d) Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\frac{e^x}{x}$

Exercice 16 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^2 + 2 - e^x & \text{b) } g(x) = \frac{2e^x - x}{x^2} & \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \\ \text{d) } l(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x & \text{e) } k(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x} & \text{f) } t(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 3} \end{array}$$

Exercice 17 Étudier (sens de variations et limites) sur \mathbb{R} les fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = e^{3x} - 3e^x \quad \text{b) } g(x) = (0,4x - 2)e^{-0.1x}$$

Exercice 18 *Vrai ou faux*

a. Si pour tout réel x , $f(x) \geq x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 19 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{1}{x} \sin(x)$.

Exercice 20 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = e^x - x$.

a) Dresser le tableau de variation de f .

b) En déduire le signe de $f(x)$ puis que, pour tout $x \geq 0$, $e^x > x$.

c) Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 21 Soit f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

a. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$

b. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x + 1)$.

c. Quelle propriété peut-on en déduire quant à \mathcal{C}_f et la droite $\Delta : y = x + 1$?

Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 22 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par l'expression $f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x + 2}$.

Montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f .

Exercice 23 Soit g la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. On note \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Dresser le tableau de variation de f .

2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1.

3. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \in D$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

- Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .

Exercice 24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

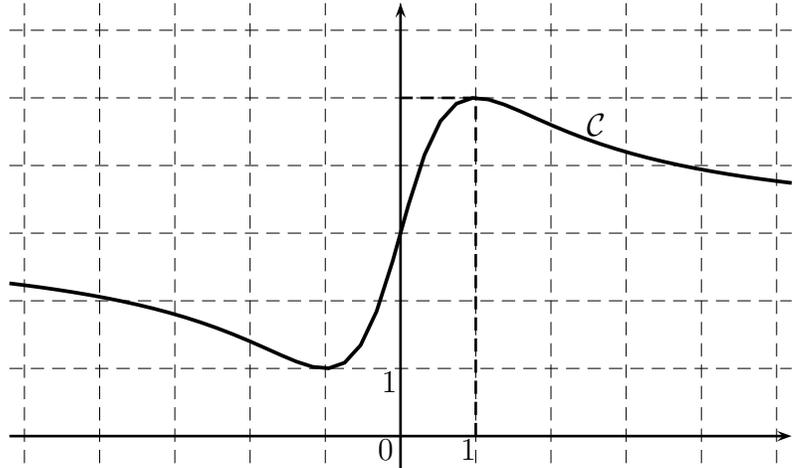
- Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .
- Représenter graphiquement ces résultats.

Exercice 25 Exercice type Bac

Partie A. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ dont la courbe représentative \mathcal{C} est donnée ci-contre.

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à \mathcal{C} en plus et moins l'infini.

Grâce aux renseignements donnés par le graphique, déterminer les réels a , b et c .



Partie B. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

- Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x , $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 + 1}$.
- Dresser le tableau de variation complet de f .
- Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.
- Montrer que pour tout réel x , $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 3$.
 - Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
(Indication : Considérer les points $M(x; f(x))$, $M(-x, f(-x))$ et $I(0; 3)$)

Partie C. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(|x|) = \frac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$.

- Déterminer la limite de g en moins l'infini.
- expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de celle de f .

Exercice 26 Déterminer les limites : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right)$