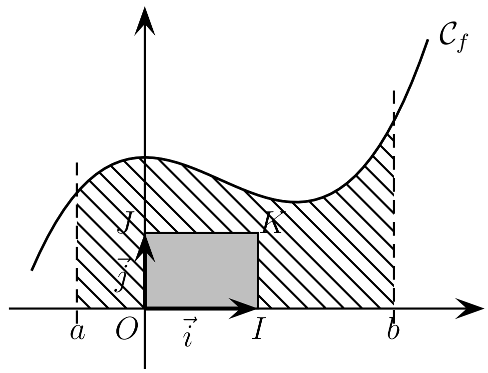
# Intégration

Terminale générale, spécialité maths

## Table des matières

# I - Aire sous une courbe : Intégrale d'une fonction continue positive




Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$.

L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ : l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

Plus précisément, le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leq x \leq b$, et $0 \leq y \leq f(x)$.

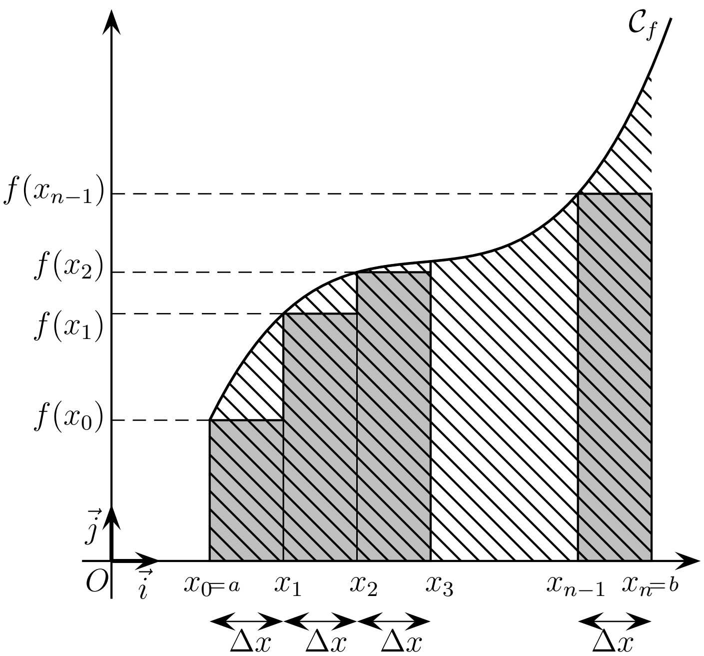
Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction** $f$ **de** $a$ **à** $b$ ; on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

On découpe l'intervalle $[a;b]$ en $n$ intervalles de longueurs $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ :

$$[x_0;x_1]\ ;\quad [x_1;x_2]\ ;\quad [x_2;x_3]\ ;\quad \dots\ ; [x_{n-1};x_n]$$

avec $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, ...La suite $(x_p)$ des abscisses est une suite arithmétique de raison $\Delta x$. En particulier, pour tout entier $k$, la $k^{\text{ème}}$ abscisse est $x_k = x_0 + k\Delta x$.




$$\begin{aligned} s_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots\ + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

On montre alors (voir plus tard dans le cours) que $(s_n)$ est convergente, avec

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>*Remarque 1 :*</u> *La notation* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *(introduite par Leibniz, et/ou Newton, au XVII*$^e$ *siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où* $\Delta x \to 0$*, et donc* $n \to +\infty$*, notée finalement* $dx$ *(largeur infinitésimale), et le symbole* $\sum$ *se transformant en* $\int$ *:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

*Remarque 2 : La variable $x$ est dite muette. La lettre qui la désigne n'a pas d'importance :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \ \dots$$

**Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^1 x\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2t+1)\,dt$, et $K = \displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,dx$.

**Exercice 2** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^4 E(x)\,dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de $x$.

**Exercice 3** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 4x - 3$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 1$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$.

# II - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

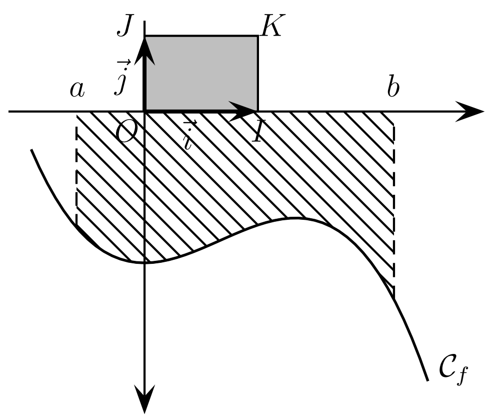
D'une manière plus générale, l'intégrale d'une fonction $f$ continue sur un intervalle $[a;b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses.

## 1) Intégrale d'une fonction continue négative

Soit $f$ une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans ce cas, l'intégrale de $f$ de $a$ à $b$ est l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$ :

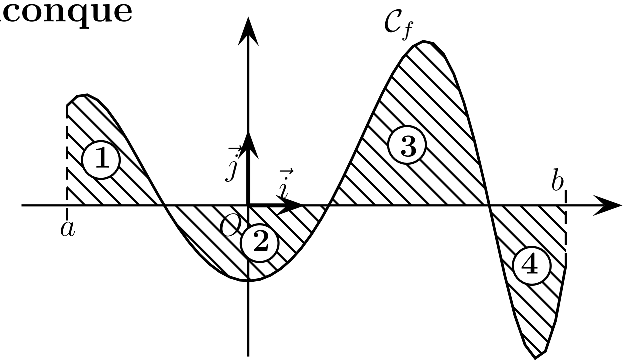
$$\int_a^b f(x)dx = -\text{aire}\,(\mathcal{D})$$




## 2) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour une fonction $f$ continue de signe quelconque sur un intervalle $[a;b]$, l'intégrale de $f$ est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels $f$ garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$




On convient de plus que : $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

# III - Propriétés de l'intégrale

## 1) Linéarité

Pour toutes fonctions $f$ et $g$ continues sur $[a;b]$ et tout réel $\lambda$,

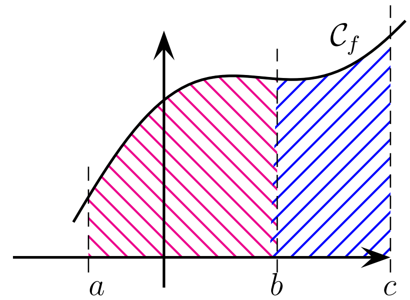
$$\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

## 2) Relation de Chasles

Soit $f$ une fonction continue sur $[a;c]$,
et soit $b$ un réel de $[a;c]$, alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$




## 3) Positivité

— Si $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

— Si $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

## 4) Ordre et intégrale

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout $x$ de $[a;b]$,

$$f(x)\leq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

## 5) Moyenne d'une fonction

**Définition** *Soit $f$ continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, alors la valeur moyenne de $f$ sur $[a;b]$ est :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

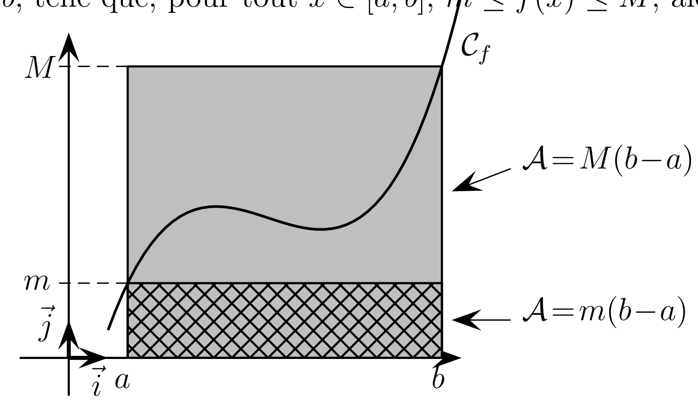
## 6) Inégalités de la moyenne

Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, telle que, pour tout $x\in[a;b]$, $m\leq f(x)\leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

ou, de manière équivalente,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$




<u>Démonstration:</u> Pour tout $x\in[a;b]$, $m\leq f(x)\leq M$, et donc, d'après la propriété de l'ordre des intégrales :

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Or, $\displaystyle\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ et, $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, d'où l'encadrement de la moyenne. □

**Exercice 4**

a) Démontrer que pour tout réel $t$ de $[0;1]$, on a $\dfrac{t}{1+t^2} \leq t$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}$.

**Exercice 5** $f$ est la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Etudier les variations de $f$ sur $[1;2]$.

b) Démontrer que pour tout $x$ de $[1;2]$, $\dfrac{e^2}{4} \leqslant \dfrac{e^x}{x^2} \leqslant e$.

c) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

**Exercice 6** Soit $f$ définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = E(x^2)$ où $E$ désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que $f$ est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0;3]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,dx$.

## IV - Intégrales et primitives

**Théorème** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et $a \in I$.*
*Alors la fonction $F$ définie sur $I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est* **l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$.**

Démonstration: Soit $x_0$ un réel de $I$, on cherche à montrer que $F$ est dérivable en $x_0$ et que $F'(x) = f(x)$.

On revient donc à la définition de la dérivée de $F$ en $x_0$ : la limite du taux de variation $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$.

Soit donc $h$ un réel tel que $x_0 + h \in I$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Comme $f$ est continue sur $I$, $f$ est en particulieer continue sur $[x_0; x_0+h]$, et donc

$$\text{pour tout } t \in [x_0; x_0+h], \quad \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq f(t) \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$$

Comme l'intégral conserve l'ordre des intégrales (ou d'après les inégalités de la moyenne),

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)dt$$

soit $\quad (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$

c'est-à-dire, $\quad h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)$

ou encore, $\quad \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x) \leq \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x).$

Quand $h$ tend vers 0, l'intervalle $[x_0; x_0+h]$ se réduit à $\{x_0\}$, et donc, comme $f$ est continue en $x_0 \in I$,

$$\lim_{h\to 0}\left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Min}} f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\text{Max}} f(x)\right) = f(x_0)$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ce qui signifie exactement que la fonction $F$ est dérivable en $x_0$, et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in I$, et donc on a bien $F' = f$ : $F$ est **une primitive** de $f$.

On a de plus, $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, et donc, $F$ est **la primitive** de $f$ s'annulant en $a$. □

**Exercice 7** Soit $F$ la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Déterminer le sens de variation de $F$.

**Propriété** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $a$ et $b$ deux réels de $I$, et $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

*La quantité $F(b)-F(a)$ se note souvent $\Big[F(x)\Big]_a^b$, et ainsi* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)}$

<u>Démonstration:</u> Soit $\alpha \in I$, et $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,dt$ la primitive de $f$ qui s'annule en $\alpha$.

On a alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^b f(t)\,dt = -\int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_\alpha^b f(t)\,dt = -F(a)+F(b)$. □

**Exercice 8** Déterminer les intégrales suivantes : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ $\quad I_2 = \displaystyle\int_{-1}^3 (5-2x)\,dx$

$I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\,dx$ $\quad I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $\quad I_5 = \displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\,dx$ $\quad I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$ $\quad I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$

**Exercice 9** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$, et, pour un entier $n \geqslant 1$, l'integrale $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$.

1. Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   Représenter sur ce graphique $I_n$.
2. Calculer $I_n$ pour tout entier, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

**Exercice 10** Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle $I$ donné :

a) $f : x \mapsto x^2$ sur $I = [-1;1]$

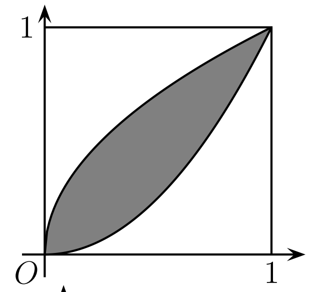
b) $f : x \mapsto x^3$ sur $I = [-1;1]$

c) $f : x \mapsto x\,(3x^2-1)^2$ sur $I = [-1;2]$

d) $f : x \mapsto \dfrac{3}{2x+1}$ sur $I = [0;4]$

e) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{(8-x^3)^2}$ sur $I=[0;1]$

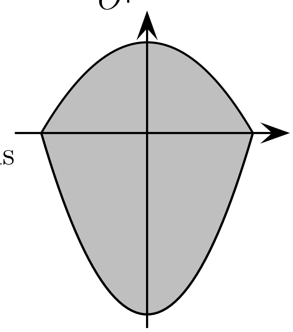
**Exercice 11**
Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y=\sqrt{x}$ et $y=x^2$.




Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

*(On pourra se rappeler que $\sqrt{x}=x^{1/2}$)*

**Exercice 12**



Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x)=x^2-4$ et $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2$.

**Exercice 13** Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a) $f(x)=(2-x)(x-1)$ sur $I=[-1;0]$ b) $g(x)=e^{-3x+1}$ sur $I=[-1;1]$.

**Exercice 14** **Vrai-Faux** Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$, et soit $F$ et $G$ les fonctions définies $[0;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x)=x\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. Soit de plus $\Gamma$ la courbe représentative de $f$ dans un repère.

1. $G(0)=G(1)$
2. $G$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x\in[0;+\infty[$, $G'(x)=F(x)+xf(x)$.
3. On ne peut pas prévoir le sens de variation de $G$ avec les seules informations de l'énoncé.
4. L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x=0$, $x=2$, $y=0$ et la courbe $\Gamma$ se calcule par $F(2)+F(0)$.

**Exercice 15** **Étude d'une suite** *(D'après Bac)*

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;1]$ par $f(x)=e^{-x^2}$ et on définit la suite $(u_n)$ par :

$$u_0=\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et, pour tout entier } n\geqslant 1, \quad u_n=\int_0^1 x^n\,f(x)\,dx$$

1. a) Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{1}{e}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

   b) En déduire que $\dfrac{1}{e}\leqslant u_0\leqslant 1$.
2. Calculer $u_1$.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $0\leqslant u_n$.

   b) Etudier les variations de la suite $(u_n)$.
   En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice** 16 **D'après Bac**
On considère la suite numérique $(J_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt\,.$$

1. Démontrer que la suite $(J_n)$ est croissante.
2. On définit la suite $(I_n)$, pour tout entier naturel $n$ non nul, par : $\quad I_n = \displaystyle\int_1^n (t+1)\,e^{-t}\,dt.$

   a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

   b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

   c) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.
   Exprimer alors $I_n$ en fonction de $n$.

   d) En déduire que la suite $(J_n)$ est majorée par un nombre réel.

   e) Que peut-on en conclure pour la suite $(J_n)$ ?

# V - Intégration par parties

**Théorème** *Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies, dérivables et dont les dérivées sont continues sur un intervalle $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

*ou encore, dans une forme moins rigoureuse mais plus simple à mémoriser :*

$$\int_a^b uv' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v$$

Démonstration: Les fonctions $u$ et $v$ étant dérivables, le produit $uv$ est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions $u$, $v$, $u'$ et $v'$ étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue, et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(u(x)v(x)\right)'dx &= \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

De plus, comme la fonction $uv$ est une primitive de $(uv)'$, on a

$$\int_a^b \left(u(x)v(x)\right)'dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$$

et on obtient :

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

d'où la formule d'intégration par parties en isolant dans cette relation une intégrale. □

**Exercice** 17 Calculer les intégrales suivantes :

• $I=\displaystyle\int_0^3 xe^x\,dx$ • $J=\displaystyle\int_{-2}^2 4xe^{3x-1}dx$ • $K=\displaystyle\int_{-1}^1 2x(8x+2)^2dx$ • $L=\displaystyle\int_{-1}^1 2x^3e^{x^2-1}dx$ • $M=\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$

**Exercice** 18 On considère les intégrales $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$.

a) En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale $I$ la méthode d'intégration par parties, trouver deux relation entre $I$ et $J$.

b) Calculer alors les intégrales $I$ et $J$.

**Exercice** 19 Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer $I_n$ en fonction de $n$.

**Exercice** 20 Soit $(I_n)$ la suite définie pour tout entier $n\geq 0$ par $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\,e^{-t}\,dt$.

1. Calcul des premiers termes de la suite
   a) Calculer $I_0$ et $I_1$.
   b) Exprimer $I_2$ en fonction de $I_1$, puis en déduire $I_2$.
   c) Exprimer $I_3$ en fonction de $I_2$, puis calculer $I_3$.
2. Étude de la suite
   a) Démontrer que, pour tout entier $n$, $I_n\geq 0$.
   b) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)$.
   c) Démontrer que la suite $(I_n)$ est convergente.
3. Calcul de la limite de la suite
   a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_{n+1}$ en fonction de $I_n$.
   b) Démontrer que, pour tout entier $n\geq 1$, $I_n\leqslant\dfrac{1}{n}$.
   c) En déduire la limite de la suite $(I_n)$.