Intégration - Exercices

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes : $I=\displaystyle\int_0^1 x\,dx$, $J=\displaystyle\int_1^3 (2t+1)\,dt$, et $K=\displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,dx$.

Exercice 2 Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^4 E(x)\,dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=4x-3$.
Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t\geq 1$, la fonction $F(t)=\displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$.

Exercice 4

a) Démontrer que pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\dfrac{t}{1+t^2}\leq t$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt\leq\frac{1}{2}$.

Exercice 5 f est la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Etudier les variations de f sur $[1;2]$.

b) Démontrer que pour tout x de $[1;2]$, $\dfrac{e^2}{4}\leqslant\dfrac{e^x}{x^2}\leqslant e$.

c) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

Exercice 6 Soit f définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=E(x^2)$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que f est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0;3]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,dx$.

Exercice 7 Soit F la fonction définie par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.
Déterminer le sens de variation de F.

Exercice 8 Déterminer les intégrales suivantes : $I_1=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ $\quad I_2=\displaystyle\int_{-1}^3 (5-2x)\,dx$

$I_3=\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\,dx$ $\quad I_4=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $\quad I_5=\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\,dx$ $\quad I_6=\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$ $\quad I_7=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$, et, pour un entier $n\geqslant 1$, l'integrale $I_n=\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   Représenter sur ce graphique I_n.
2. Calculer I_n pour tout entier, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 10 Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

a) $f : x\mapsto x^2$ sur $I=[-1;1]$

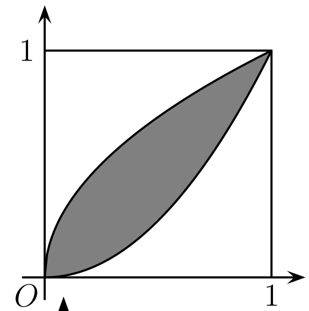
b) $f : x \mapsto x^3$ sur $I = [-1; 1]$

c) $f : x \mapsto x\left(3x^2 - 1\right)^2$ sur $I = [-1; 2]$

d) $f : x \mapsto \dfrac{3}{2x+1}$ sur $I = [0; 4]$

e) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\left(8 - x^3\right)^2}$ sur $I = [0; 1]$

Exercice 11

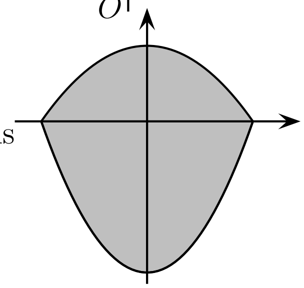


Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$)

Exercice 12



Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.

Exercice 13

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = (2 - x)(x - 1)$ sur $I = [-1; 0]$ b) $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1; 1]$.

Exercice 14 **Vrai-Faux**

Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit f une fonction continue et positive sur $[0; +\infty[$, et soit F et G les fonctions définies $[0; +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x) = x\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. Soit de plus Γ la courbe représentative de f dans un repère.

1. $G(0) = G(1)$
2. G est dérivable sur $[0; +\infty[$, et pour tout $x \in [0; +\infty[$, $G'(x) = F(x) + xf(x)$.
3. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G avec les seules informations de l'énoncé.
4. L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2) + F(0)$.

Exercice 15 **Étude d'une suite** *(D'après Bac)*

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$$

1. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b) En déduire que $\dfrac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

   b) Etudier les variations de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 16 **D'après Bac**
On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt\,.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $\quad I_n = \displaystyle\int_1^n (t+1)\,e^{-t}\,dt.$
   a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.
   c) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.
   Exprimer alors I_n en fonction de n.
   d) En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel.
   e) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 17 Calculer les intégrales suivantes :
• $I = \displaystyle\int_0^3 xe^x\,dx$ • $J = \displaystyle\int_{-2}^2 4xe^{3x-1}dx$ • $K = \displaystyle\int_{-1}^1 2x(8x+2)^2dx$ • $L = \displaystyle\int_{-1}^1 2x^3e^{x^2-1}dx$ • $L = \displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$

Exercice 18 I et J sont les intégrales définies par $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$.

a) En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale I la méthode d'intégration par parties, trouver deux relation entre I et J.

b) Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice 19 Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 20 Soit (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,e^{-t}\,dt$.

1. Calcul des premiers termes de la suite
   a) Calculer I_0 et I_1.
   b) Exprimer I_2 en fonction de I_1, puis en déduire I_2.
   c) Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.
2. Étude de la suite
   a) Démontrer que, pour tout entier n, $I_n \geq 0$.
   b) Étudier le sens de variation de la suite I.
   c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
3. Calcul de la limite de la suite
   a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{ne}$.
   c) En déduire la limite de la suite (I_n).