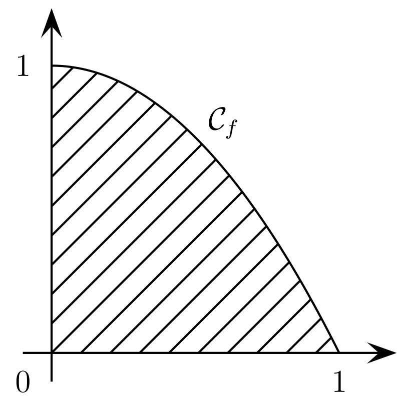
Exercice: Calcul de l'aire sous une courbe $T^{\text{ale}}S$

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par l'expression

$$f(x) = 1 - x^2$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Le but de l'exercice est de calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (aire hachurée ci-contre).



A. **Question préliminaire :** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

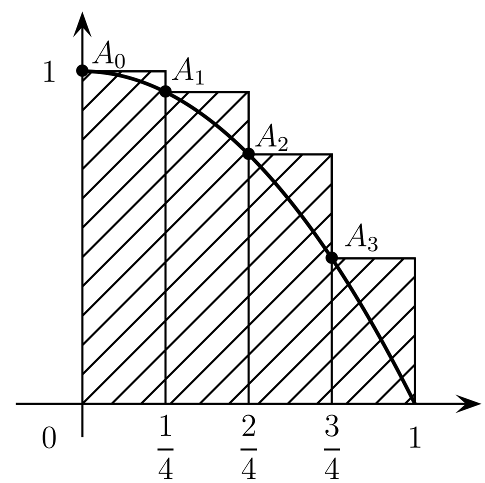
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

B. Pour calculer une valeur approchée de l'aire recherchée, on subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, et on approxime l'aire dans chacun de ces intervalles par celle d'un rectangle.

1. **Un cas particulier :** $n = 4$

   Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$, A_0, A_1, A_2 et A_3, et d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

   En déduire l'aire hachurée $\mathcal{A}_4$, approximation de l'aire $\mathcal{A}$.



2. **Cas général :** $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

   a. Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$, A_0, A_1, …, A_{n-1}, et d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$.

   b. En déduire l'expression $\mathcal{A}_n$ de l'aire des n rectangles.

   Montrer que $\mathcal{A}_n = 1 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$.

   c. $\mathcal{A}_n$ est une approximation de l'aire $\mathcal{A}$ recherchée.

   Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathcal{A}_n$.

   Cette limite est l'aire $\mathcal{A}$ recherchée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.

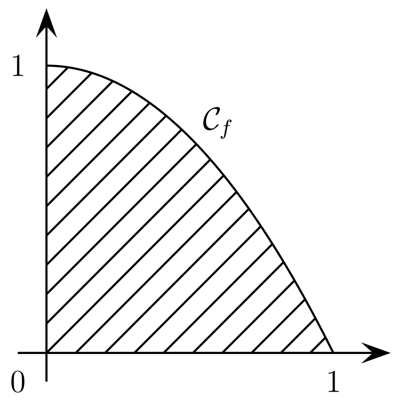
Exercice: Calcul de l'aire sous une courbe $\quad T^{\text{ale}}S$

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par l'expression

$$f(x) = 1 - x^2$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Le but de l'exercice est de calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (aire hachurée ci-contre).



A. **Question préliminaire :** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

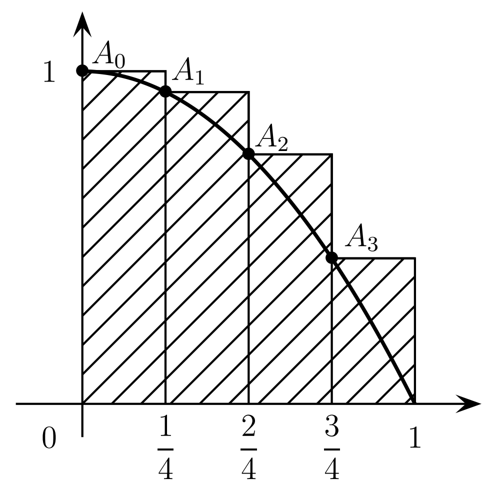
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

B. Pour calculer une valeur approchée de l'aire recherchée, on subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, et on approxime l'aire dans chacun de ces intervalles par celle d'un rectangle.

1. **Un cas particulier :** $n = 4$

   Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$, A_0, A_1, A_2 et A_3, et d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

   En déduire l'aire hachurée $\mathcal{A}_4$, approximation de l'aire $\mathcal{A}$.



2. **Cas général :** $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

   a. Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$, A_0, A_1, …, A_{n-1}, et d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$.

   b. En déduire l'expression $\mathcal{A}_n$ de l'aire des n rectangles.

   Montrer que $\mathcal{A}_n = 1 - \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$.

   c. $\mathcal{A}_n$ est une approximation de l'aire $\mathcal{A}$ recherchée.

   Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathcal{A}_n$.

   Cette limite est l'aire $\mathcal{A}$ recherchée : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.