Géométrie dans l'espace

Terminale générale
spécialité maths

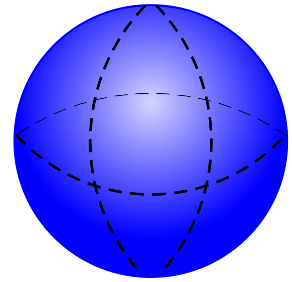


Table des matières

I Rappels - Produit scalaire dans le plan

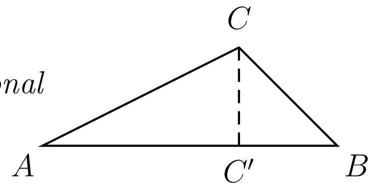
Définition *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u},\vec{v})$

Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ *(car* $\cos(\vec{u},\vec{u}) = \cos(0) = 1$*).*

Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout réel k,*

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ *(symétrie)*
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\vec{u}\cdot\vec{v}$ *(linéarité)*
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ *(linéarité)*

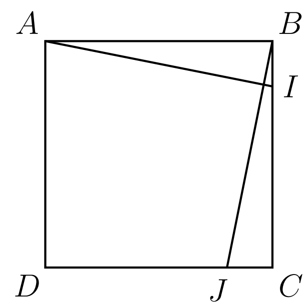
Propriété *(Produit scalaire et projection)*



Soit A, B et C trois points, et C' le projeté orthogonal de C sur (AB), alors,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = \begin{cases} AB\times AC' \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC'} \text{ ont même sens} \\ -AB\times AC' \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC'} \text{ ont un sens contraire} \end{cases}$$

Propriété $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \quad ou\,,\ \vec{v} = \vec{0} \\ ou\,,\ \vec{u}\perp\vec{v} \end{cases}$



Exercice 1 Soit $ABCD$ un carré, et I et J les points tels que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.
Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendicualires.

Exercice 2 A et B sont deux points du plan tels que $AB = 3$ cm.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

b) Donner un point H de (AB) tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} = -6$.
Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -6$.

Propriété *(Formules de polarisation)*

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{u}|^2\Big] \end{aligned}$$

<u>Démonstration:</u> C'est une démonstration à connaître car, entre autre, permettant de retrouver simplement toutes ces formules qui sont, en fait, des identités remarquables :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

d'où la première formule en isolant le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\Big]$

De même,

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \quad =\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

d'où la deuxième formule en isolant le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\Big[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big]$

Enfin, on peut faire la somme des deux formules précédentes, ce qui donne

$$\begin{aligned}2\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\Big]+\frac{1}{2}\Big[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

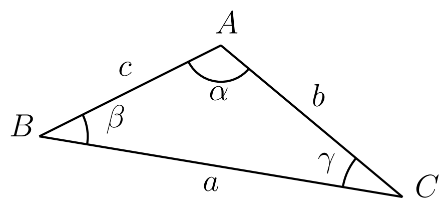
d'où le résultat en divisant par 2.

On peut aussi, comme précédemment, développer le calcul des carrés scalaires $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

□

Théorème *(Al-Kashi, ou Pythagore généralisé)*
Dans un triangle ABC quelconque, on a :

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos\alpha$$



Corollaire *(Théorème de Pythagore) ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2=b^2+c^2$.*

<u>Démonstration:</u> $a^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$

$$\begin{aligned}&= \overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= c^2+b^2+2\cos(\pi-\alpha)\\ &= c^2+b^2-2\cos\alpha\end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore est alors un corollaire direct :
ABC rectangle en $A \iff \alpha=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \iff \cos\alpha=0 \iff a^2=b^2+c^2$.

□

Exercice 3 Soit un triangle de côtés 3cm, 5cm et 7cm. Déterminer les trois angles de ce triangle.

II Géométrie analytique du plan

1) Expression du produit scalaire

Propriété *Soit dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$*

<u>Remarque :</u> On a alors aussi, $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$, soit, $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

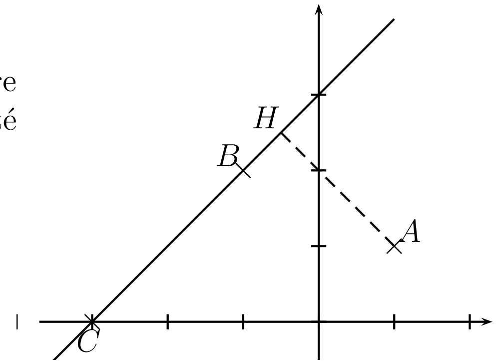
Exercice 4 Reprendre l'exercice 1, et donner dans le repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ les coordonnées de tous les points de la figure.

Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 5 Dans un RON, on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$.

Donner une valeur de $\widehat{ABC}$ à $0,1$ degré près.

Exercice 6 Dans un RON (repère orthonormal), on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$. Soit de plus H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).



1. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Calculer les coordonnées de H.
   En déduire la longueur BH.

2) Équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

Définition *Un vecteur $\vec{n}$ normal à une droite d est un vecteur orthogonal à la direction de d.*

Conséquence :
- Ainsi, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, on a $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$.
- Si A est un point de la droite d, alors d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Propriété *Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.*

Démonstration: Soit $\vec{n}(a;b)$, et $A(x_A;y_A)$ un point de d, et $M(x;y)$ un point quelconque de la droite, alors on a $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, soit
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_B)$, donc,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \quad &\iff a(x-x_A)+b(y-y_B)=0\\ &\iff ax+by+c=0, \text{ avec } c=-ax_A-by_B\end{aligned}$$

□

Remarque : Si $b\neq 0$, on peut retrouver l'équation réduite de la droite $d : ax+by+c=0 \iff y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

Exercice 7 ABC est un triangle tel que $A(3;-2)$, $B(0;-1)$ et $C(1;3)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Exercice 8 Dans un RON, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

a) Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C.

b) Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C (on pourra tout d'abord déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à $\overrightarrow{AB}$).

Exercice 9 ABC est un triangle tel que $A(1;-2)$, $B(4;3)$ et $C(-2;1)$.
Calculer les coordonnées de l'hortocentre du triangle ABC.

3) Représentation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}$

a) Représentation paramétrique

La droite d passant par le point $A\,(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$, $t\in\mathbb{R}$.

Définition *L'équation $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, est une* **une représentation paramétrique** *de la droite, le réel t étant le paramètre.*

Avec des coordonnées, pour $\vec{u}(a;b)$,

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d \quad &\iff \text{ il existe un réel } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{array} \right. \end{aligned}$$

(c'est-à-dire tel que "$M = A + t\vec{u}$").
Le système précédent s'appelle donc aussi **une représentation paramétrique** *de la droite d, ou un système d'équations paramétriques de la droite d. (t étant ici le paramètre de cette représentation).*

Exercice 10 On considère la droite d passant par $A(-2;3)$ et $B(5;2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9;4)$, $N(12;1)$, $P(-23;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

b) Représentation par une équation cartésienne

La droite d passant par le point $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires**, soit aussi avec $M(x;y)$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A) \text{ et } \vec{u}(a;b) \text{ colinéaires} \quad &\iff b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ &\iff \alpha x + \beta y + c = 0 \end{aligned}$$

avec $\alpha = b$, $\beta = -a$ et $c = -ay_A - bx_A$.

Définition *L'équation $\alpha x + \beta y + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-\beta;\alpha)$ et de vecteur normal $\vec{n}(\alpha;\beta)$.*

Remarque : on remarque facilement que $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Exercice 11 On considère les droites $d_1 : x + 2y + 3 = 0$ et $d_2 : 3x - y + 2 = 0$ et $d_3 : -6x + 2y + 6 = 0$.

a) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles parallèles ? sécantes ?

b) Déterminer les intersections éventuelles des droites d_1 et d_2, puis d_2 et d_3.

Exercice 12 Les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1 + 2t \\ y & = 3 + 4t \end{array} \right., t \in \mathbb{R} \quad \text{et } d_2 : \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2 + t \\ y & = 1 - 2t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}$$

sont-elles sécantes ? Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4) Equation d'un cercle

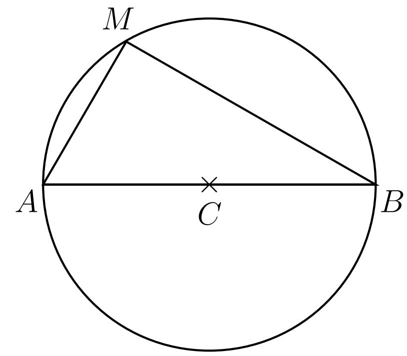
Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ deux points du plan, et $\Omega(x_C;y_C)$ le milieu de $[AB]$ (donc $x_\Omega = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_\Omega = \frac{y_A+y_B}{2}$)

Propriété *1. Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que*

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

2. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_C;y_C)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$\begin{aligned}\Omega M=R &\iff \sqrt{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2}=R^2\\ &\iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2\end{aligned}$$



Exercice 13 Dans un RON, on considère la droite d d'équation $x+2y-2=0$ et le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $A(-3;5)$ et $B(1;-1)$.

1. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ et d.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Calculer les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d.

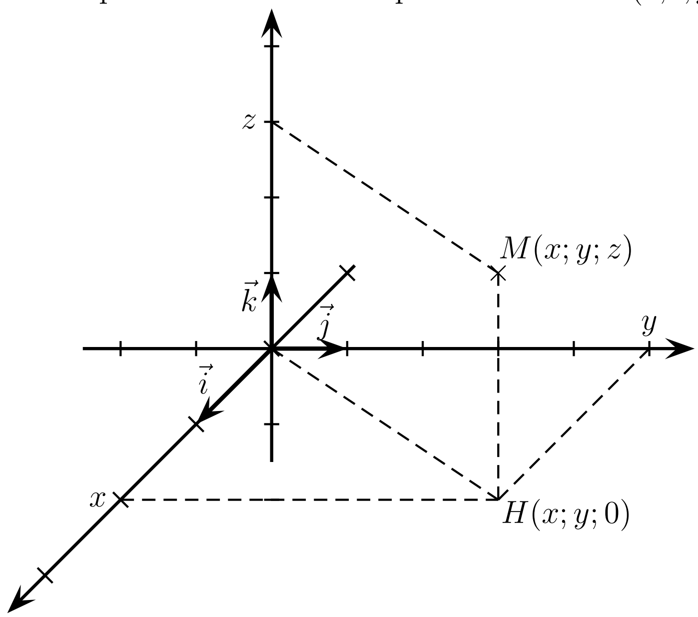
Exercice 14 Soit dans un RON, le point $I(3;-1)$ et la droite d d'équation $-x+y+1=0$.

a) Calculer la distance du point I à la droite d.

b) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I est tangent à d.

III Géométrie analytique dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

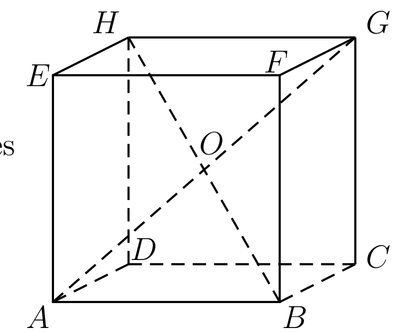


Pour tout point M de l'espace, il existe un **unique** triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

On note $M(x; y; z)$ les coordonnées du point M.

Exercice 15 $ABCDEFGH$ est un cube.



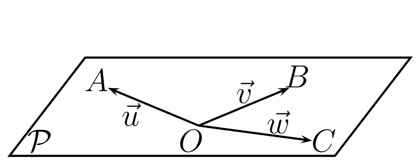
1) Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points.
2) Déterminer les longueurs AC, OG et BG.
3) Le triangle HAF est-il rectangle en A ?

Exercice 16 Soit, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(1; 5; 2)$, $B(-2; 3; 4)$, $C(-2; -2; 0)$ et $D(7; -3; 1)$.

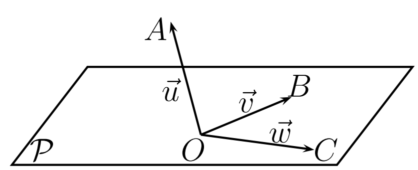
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
2. Calculer les longueurs AB et AC.
3. Déterminer les coordonnées des milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$.
4. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC}$.
5. Déterminer les coordonnées du point K tel que $ABCK$ soit un parallélogramme.
6. Calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à B.

1) Vecteurs coplanaires

Définition *(Vecteurs coplanaires) Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie qu'ils peuvent être placés dans un même plan : les points O, A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.*



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

Propriété *Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il exsite des réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.*

Exercice 17 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 18 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Propriété *Si $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, alors, pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a; b; c)$ tel que*

$$\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \ .$$

Pour tout point A, $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{v})$ forme alors un repère de l'espace.

Exemple : $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, 2 à 2 orthogonaux, et forment un repère (orthonormé) de l'espace : tout vecteur $\vec{t}$ s'exprime selon ses coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère :

$$\vec{t} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \ .$$

2) Représentation paramétrique d'une droite

La droite d passant par le point $A\,(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

Définition *L'équation $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, est une* **une représentation paramétrique** *de la droite, le réel t étant le paramètre.*

Avec des coordonnées, pour $\vec{u}(a; b; c)$,

$$\begin{aligned} M(x; y; c) \in d \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{il existe un réel } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array} \right. \end{aligned}$$

(c'est-à-dire tel que "$M = A + t\vec{u}$").
Le système précédent s'appelle donc aussi **une représentation paramétrique** *de la droite d, ou un système d'équations paramétriques de la droite d. (t étant ici le paramètre de cette représentation).*

Exercice 19 On considère la droite d passant par $A(-2; 3; 1)$ et $B(5; 2; -2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9; 4; 4)$ et $N(12; 1; 1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 20 Dans un RON, on donne les points $A(1; -2; 3)$ et $B(0; 0; 1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Les points $C(-3; 6; -5)$ et $D(2; -5; 5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 21 Les droites d et d' définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2t &-& 1 \\ y &=& -3t &+& 2 \\ z &=& t && \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et,} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3t && \\ y &=& t &+& 2 \\ z &=& -3t &-& 2 \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 22 Démontrer que les droites d et d' définies par les représentations paramétriques suivantes sont sécantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 5 &+& 3t \\ y &=& 2 &+& t \\ z &=& 1 &-& 4t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et,} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -11 &+& 2t \\ y &=& 10 &-& 2t \\ z &=& 4 &+& t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

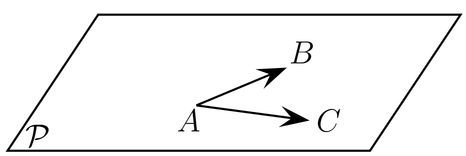
Exercice 23 Soit, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $A(-1;1;2)$, $\vec{u}(1;0;1)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{1}{2};-1;1\right)$.

1. Ecrire une représentation paramétrique du plan $(A;\vec{u},\vec{v})$
2. Les points $B(1;2;3)$ et $C(0;-1;4)$ appartiennent-il à ce plan ?
3. Déterminer l'intersection d de ce plan et du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   Préciser un point et un vecteur directeur de d.

IV Produit scalaire dans l'espace

Définition *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.*
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

Remarque : Si les points A, B et C ne sont pas alignés, il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.
Dans ce plan, $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère (a priori quelconque).

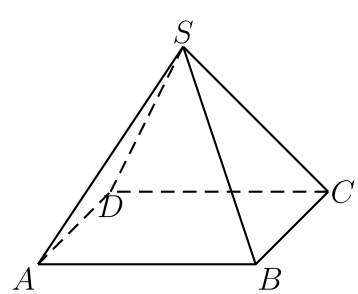


Exercice 24 $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S et dont toutes les arêtes ont la même longueur a.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ *b)* $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$

c) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ *d)* $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Quel est le volume de cette pyramide ?

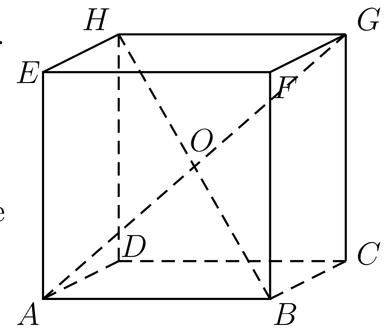


Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent vraies dans l'espace : symétrie, bilinéarité, formules de polarisation, projection orthogonale.
Il faut néanmoins adapter l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées :

Propriété *Dans un RON de l'espace, soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, alors,*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exercice 25 $ABCDEFGH$ est un cube de centre O et d'arête a.

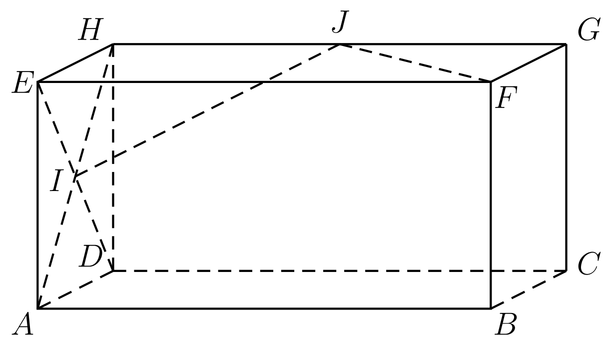


1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires :

$$a)\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG} \quad b)\ \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BA} \quad c)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$$

2) Déterminer dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points et retrouver a).
3) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HOG}$.

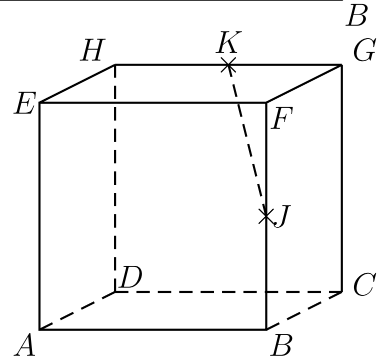
Exercice 26 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ cm et $AB = 2$ cm



I est le centre du carré $ADHE$ et J le milieu du segment $[GH]$.

a) Donner, dans le RON $\left(A;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des points I, J et F. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JF}$.
b) Déterminer l'angle, au dixième de degré près, $\widehat{IJF}$.

Exercice 27 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
J et K sont les milieux respectifs des segments $[FB]$ et $[GH]$.
Calculer JK.



V Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux droites

Définition *Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles menéees par un point quelconque sont perpendiculaires.*
En d'autres termes, deux droites sont orthogonales si leurs directions le sont.

Remarque : Dans l'espace, deux droites peuvent n'être ni parallèles ni sécantes, et on a donc :

Propriété *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales* **et** *sécantes.*

Exercice 28 Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?

$$d_1 : \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2+4t \\ z &= 3-t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \text{ et } d_2 : \begin{cases} x &= -2+2t \\ y &= 1-t \\ z &= 1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

2) Droites et plans perpendiculaires

Définition *Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

Propriété *Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ orthogonaux à $\vec{u}$.*

Démonstration:

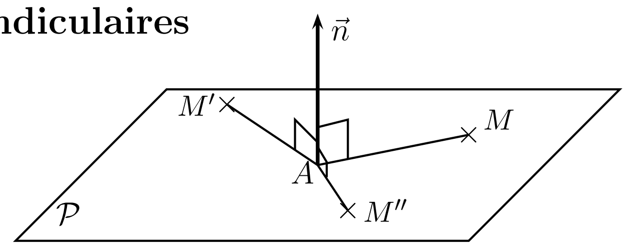
- **La condition est nécessaire.** Si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.
  En particulier, il existe deux droites de $\mathcal{P}$, non parallèles et orthogonales à $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ est donc orthogonal aux vecteurs directeurs de ces droites qui sont des vecteurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires.
- **Réciproque : la condition est suffisante.** Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ orthogonaux à $\vec{u}$.
  Alors, pour tout vecteur $\vec{z}$ de $\mathcal{P}$, les vecteurs $\vec{z}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, et donc, il existe α et β tels que $\vec{z} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.
  On a alors, $\vec{u}\cdot\vec{z} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v} + \beta\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$, ce qui montre que $\vec{u}$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux, et donc, $\vec{z}$ étant un vecteur quelconque de $\mathcal{P}$, que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

$\square$

Exercice 29 On considère dans un RON, les points $A(-1;-1;-1)$, $B(0;-2;0)$ et $C(-2;1;0)$.

Montrer que le vecteur $\vec{n}(3;2;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), et déterminer une équation de ce plan.

3) Vecteur normal à un plan et plans perpendiculaires



Propriété *Soit $\vec{n}$ un vecteur et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}$.*

Corollaire *Dans un repère orthonormal, Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.*

Démonstration: Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $M(x;y;z)$ alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$
et $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)$.
Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff ax+by+cz+d=0$, en posant $d = -ax_A - bx_B - cx_C$. $\square$

Définition *Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.*

Exercice 30 L'espace est muni d'un RON $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. A est le point de coodonnées $(1;-5;7)$.

$\mathcal{L}$ est le plan d'équation cartésienne : $-2x+y+z-4=0$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ soit le point A.

b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont perpendiculaires.

Exercice 31 Dans un RON on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(-1;2;5)$.

Déterminer l'équation du plan médiateur de ces deux points *(on utilisera deux méthodes différentes : en terme d'orthogonalité ou de distances aux points A et B).*

Exercice 32 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y + 3z - 1 = 0$, et le point A a pour coordonnées $A(0;-1;-4)$. On note de plus H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.

b) Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$.
Traduire cette relation en termes de coordonnées.

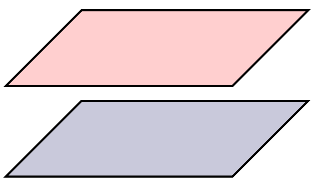
c) Déterminer k en exprimant que H appartient à $\mathcal{P}$.
En déduire les coordonnées de H et la distance AH de A au plan $\mathcal{P}$.

VI Intersection de plans et de droites dans l'espace

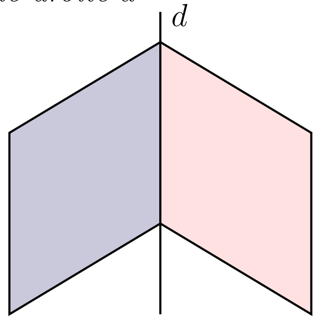
1) Intersection de deux plans

Propriété *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ deux plans de l'espace. Alors, trois cas sont possibles :*

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun



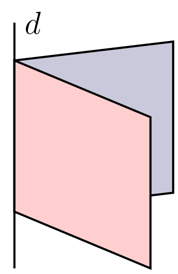
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont sécants suivant une droite d



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont confondus : leur intersection est un plan

Propriété *Algébriquement, si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ ont pour équation respective $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, leur intersection est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array}\right.$$



Si les plans sont sécants, le système est alors un <u>système d'équations cartésiennes</u> représentant la droite d.

Exercice 33

a) Le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & 3z & - & 1 & = & 0 \\ x & + & y & - & 4z & - & 6 & = & 0 \end{array}\right.$ est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite d ?

b) Déterminer x et y en fonction de z, puis en déduire une équation paramétrique de d, en introduisnat le paramètre $t = z$.
Donner alors un point et un vecteur directeur de d.

Exercice 34 Dans un RON, les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ ont pour équations cartésiennes

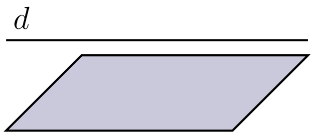
$$\mathcal{P}:\ x + y + z + 3 = 0\,,\quad \mathcal{L}:\ 2x + 2y + 2z + 7 = 0\,,\quad \text{et}\quad \mathcal{R}:\ 3x - y + 2 = 0$$

Etudier l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$, puis des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

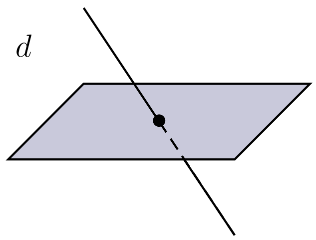
2) Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété *Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors, trois cas sont possibles :*

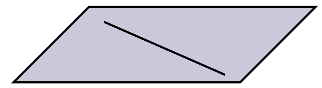
d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun



d et $\mathcal{P}$ sont sécants en un unique point A



d est contenue dans $\mathcal{P}$: leur intersection est la droite d



Exercice 35 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite d pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Exercice 36 Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2; -1; 5)$ et $(-1; 2; 3)$.

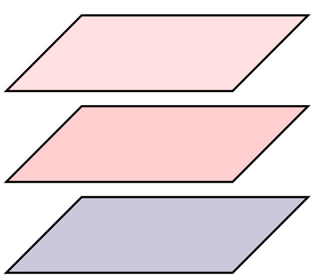
Etudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x - 3y - z = 1$.

VII Intersection de trois plans

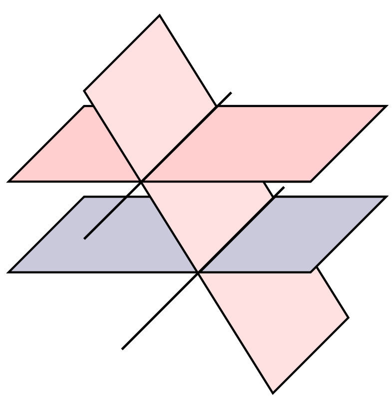
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ trois plans de l'espace. Alors, six cas sont possibles :

- **Ils n'ont aucun point commun**

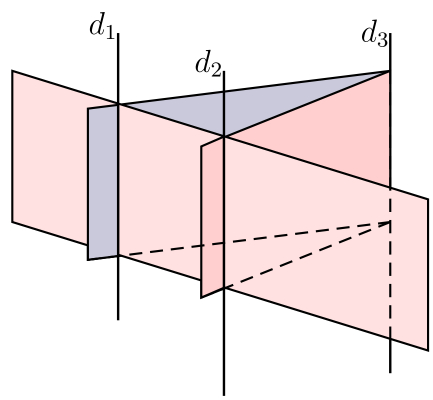
Les trois plans sont strictement parallèles



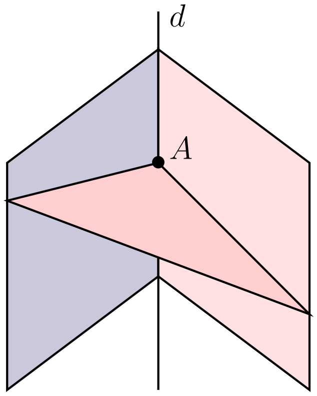
Deux plans sont strictement parallèles et sécants au troisième



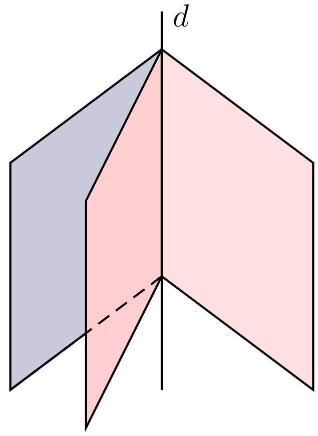
Deux plans sont sécants suivant une droite, et le troisième plan est strictement parallèle à cette droite est un plan



• Ils ont un unique point d'intersection



• Leur intersection est une droite



• Leur intersection est un plan

Les trois plans sont confondus

Propriété *Algébriquement, si dans un RON, les plans ont pour équations respectives* $ax+by+cz+d=0$*,* $a'x+b'y+c'z+d'=0$*, et* $a''x+b''y+c''z+d''=0$*, alors leur intersection est l'ensemble des points* $M(x;y;z)$ *tels que :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système de trois équations à trois inconnues peut donc avoir : aucune solution, une unique solution, ou une infinité.

Exercice 37 Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$3x+3y+z+2=0 \quad , \quad y+z-5=0 \ \text{ et, } \quad 2z-8=0\,.$$

Exercice 38 Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$4x+3y+z+2=0 \quad , \quad x+2y+z-5=0 \ \text{ et, } \quad 3x+5y+2z-9=0\,.$$

VIII Exercices

Exercice 39 *(D'après Bac 2003)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Calculer le volume du trétraèdre $ABCD$.
4. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ en radians.

Exercice 40 **ROC** *(D'après Bac 2005)*

Partie A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace. On note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points K et L.

Partie B. Dans un RON, on considère les points $A(4;0;-3)$, $B(2;2;2)$.
Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x-4y-10z-13=0$.

Exercice 41 $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un RON. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $J(0;1;0)$ et de rayon 1. u et v sont deux réels, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM}=u\vec{k}$ et $\vec{AN}=v\vec{i}$ où $A(0;2;0)$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$.
2. a) Quelles sont les coordonnées des points M et N ?
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
3. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $u^2v^2=4$.