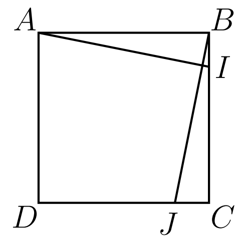
Exercices de géométrie

Terminale générale
spécialité maths

I Géométrie du plan



Exercice 1 Soit $ABCD$ un carré, et I et J les points tels que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.
Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendicualires.

Exercice 2 A et B sont deux points du plan tels que $AB=3$ cm.

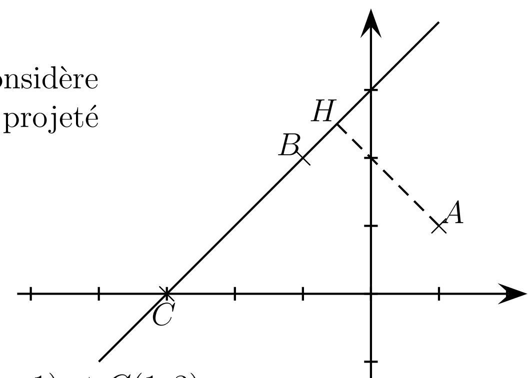
a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

b) Donner un point H de (AB) tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.
Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.

Exercice 3 Soit un triangle de côtés 3cm, 5cm et 7cm. Déterminer les trois angles de ce triangle.

Exercice 4 Reprendre l'exercice 1, et donner dans le repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ les coordonnées de tous les points de la figure. Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 5 Dans un RON, on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$. Donner une valeur de $\widehat{ABC}$ à $0,1$ degré près.



Exercice 6 Dans un RON (repère orthonormal), on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$. Soit de plus H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

1. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Calculer les coordonnées de H.
   En déduire la longueur BH.

Exercice 7 ABC est un triangle tel que $A(3;-2)$, $B(0;-1)$ et $C(1;3)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Exercice 8 Dans un RON, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

a) Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C.

b) Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C (on pourra tout d'abord déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à $\overrightarrow{AB}$).

Exercice 9 ABC est un triangle tel que $A(1;-2)$, $B(4;3)$ et $C(-2;1)$.
Calculer les coordonnées de l'hortocentre du triangle ABC.

Exercice 10 On considère la droite d passant par $A(-2;3)$ et $B(5;2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9;4)$, $N(12;1)$, $P(-23;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 11 On considère les droites $d_1 : x+2y+3=0$ et $d_2 : 3x-y+2=0$ et $d_3 : -6x+2y+6=0$.

a) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles parallèles ? sécantes ?

b) Déterminer les intersections éventuelles des droites d_1 et d_2, puis d_2 et d_3.

Exercice 12 Les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1+2t \\ y & = 3+4t \end{array} \right., t \in \mathbb{R} \text{ et } d_2 : \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2+t \\ y & = 1-2t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}$$

sont-elles sécantes ? Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 13 Dans un RON, on considère la droite d d'équation $x+2y-2=0$ et le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $A(-3;5)$ et $B(1;-1)$.

1. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ et d.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Calculer les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d.

Exercice 14 Soit dans un RON, le point $I(3;-1)$ et la droite d d'équation $-x+y+1=0$.

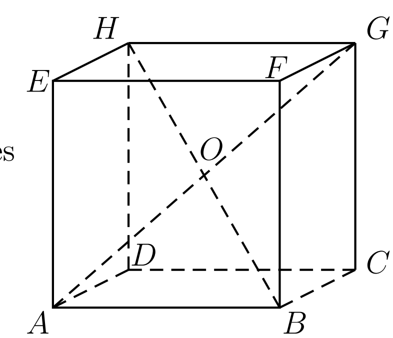
a) Calculer la distance du point I à la droite d.

b) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I est tangent à d.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 $ABCDEFGH$ est un cube.

1) Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points.
2) Déterminer les longueurs AC, OG et BG.
3) Le triangle HAF est-il rectangle en A ?



Exercice 2 Soit, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(1;5;2)$, $B(-2;3;4)$, $C(-2;-2;0)$ et $D(7;-3;1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
2. Calculer les longueurs AB et AC.
3. Déterminer les coordonnées des milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$.
4. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC}$.
5. Déterminer les coordonnées du point K tel que $ABCK$ soit un parallélogramme.
6. Calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à B.

Exercice 3 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 On considère la droite d passant par $A(-2;3;1)$ et $B(5;2;-2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9;4;4)$ et $N(12;1;1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 6 Dans un RON, on donne les points $A(1;-2;3)$ et $B(0;0;1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Les points $C(-3;6;-5)$ et $D(2;-5;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 7 Les droites d et d' définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2t &-& 1 \\ y &=& -3t &+& 2 \\ z &=& t && \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et,} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3t && \\ y &=& t &+& 2 \\ z &=& -3t &-& 2 \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 8 Démontrer que les droites d et d' définies par les représentations paramétriques suivantes sont sécantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 5 &+& 3t \\ y &=& 2 &+& t \\ z &=& 1 &-& 4t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et,} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -11 &+& 2t \\ y &=& 10 &-& 2t \\ z &=& 4 &+& t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 9 Soit, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $A(-1;1;2)$, $\vec{u}(1;0;1)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2};-1;1\right)$.

1. Ecrire une représentation paramétrique du plan $(A;\vec{u},\vec{v})$
2. Les points $B(1;2;3)$ et $C(0;-1;4)$ appartiennent-il à ce plan ?
3. Déterminer l'intersection d de ce plan et du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   Préciser un point et un vecteur directeur de d.

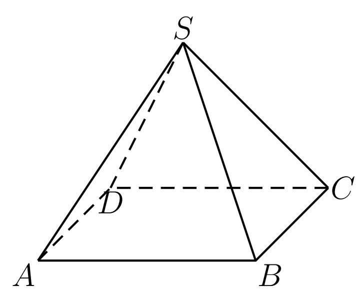
Exercice 10 $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S et dont toutes les arêtes ont la même longueur a.

Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

$a)$ $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ $\qquad b)$ $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$

$c)$ $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\qquad d)$ $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Quel est le volume de cette pyramide ?



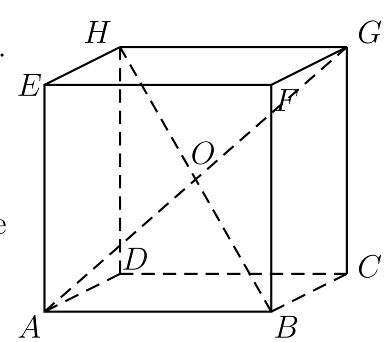
Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un cube de centre O et d'arête a.

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires :

$a)$ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG}$ $\quad b)$ $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BA}$ $\quad c)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

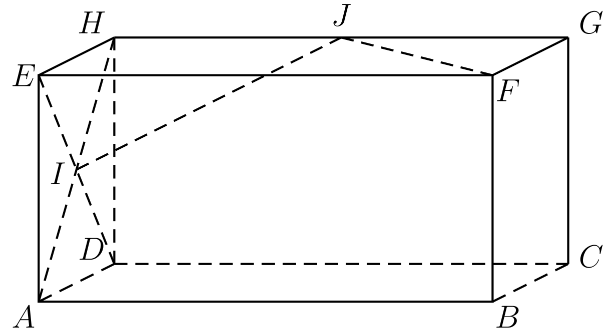
2) Déterminer dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points et retrouver a).

3) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HOG}$.



Exercice 12 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ cm et $AB = 2$ cm

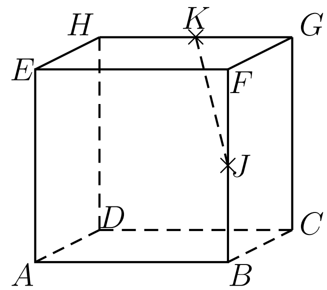
I est le centre du carré $ADHE$ et J le milieu du segment $[GH]$.



a) Donner, dans le RON $\left(A; \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des points I, J et F. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$.

b) Déterminer l'angle, au dixième de degré près, $\widehat{IJF}$.

Exercice 13 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
J et K sont les milieux respectifs des segments $[FB]$ et $[GH]$.
Calculer JK.



Exercice 14 Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?

$$d_1 : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 4t \\ z &= 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= -2 + 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 15 On considère dans un RON, les points $A(-1; -1; -1)$, $B(0; -2; 0)$ et $C(-2; 1; 0)$. Montrer que le vecteur $\vec{n}(3; 2; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), et déterminer une équation de ce plan.

Exercice 16 L'espace est muni d'un RON $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A est le point de coodonnées $(1; -5; 7)$.
$\mathcal{L}$ est le plan d'équation cartésienne : $-2x + y + z - 4 = 0$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ soit le point A.

b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont perpendiculaires.

Exercice 17 Dans un RON on considère les points $A(1; 2; 3)$ et $B(-1; 2; 5)$.
Déterminer l'équation du plan médiateur de ces deux points *(on utilisera deux méthodes différentes : en terme d'orthogonalité ou de distances aux points A et B).*

Exercice 18 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y + 3z - 1 = 0$, et le point A a pour coordonnées $A(0; -1; -4)$. On note de plus H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.

b) Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$.
Traduire cette relation en termes de coordonnées.

c) Déterminer k en exprimant que H appartient à $\mathcal{P}$.
En déduire les coordonnées de H et la distance AH de A au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 19

a) Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & 1 & = & 0 \\ x & + & y & - & 4z & - & 6 & = & 0 \end{array}\right.$ est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite d ?

b) Déterminer x et y en fonction de z, puis en déduire une équation paramétrique de d, en introduisnat le paramètre $t = z$.
Donner alors un point et un vecteur directeur de d.

Exercice 20

Dans un RON, les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ ont pour équations cartésiennes

$$\mathcal{P}:\ x+y+z+3=0\,,\quad \mathcal{L}:\ 2x+2y+2z+7=0\,,\quad \text{et}\quad \mathcal{R}:\ 3x-y+2=0$$

Etudier l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$, puis des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

Exercice 21

Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite d pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Exercice 22

Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2;-1;5)$ et $(-1;2;3)$.
Etudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x - 3y - z = 1$.

Exercice 23

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$3x+3y+z+2=0\quad,\quad y+z-5=0\ \ \text{et,}\quad 2z-8=0\,.$$

Exercice 24

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$4x+3y+z+2=0\quad,\quad x+2y+z-5=0\ \ \text{et,}\quad 3x+5y+2z-9=0\,.$$

Exercice 25 *(D'après Bac 2003)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Calculer le volume du trétraèdre $ABCD$.
4. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ en radians.

Exercice 26 **ROC** *(D'après Bac 2005)*

Partie A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace. On note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points K et L.

Partie B. Dans un RON, on considère les points $A(4;0;-3)$, $B(2;2;2)$.
Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

Exercice 27 $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un RON. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $J(0;1;0)$ et de rayon 1. u et v sont deux réels, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM}=u\vec{k}$ et $\vec{AN}=v\vec{i}$ où $A(0;2;0)$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$.
2. a) Quelles sont les coordonnées des points M et N ?

   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
3. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $u^2v^2=4$.