Convexité

Terminale générale
spécialité maths

I Premiers exercices - Rappels

Exercice 1 Des calculs de dérivées ...
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 + 2x - \dfrac{2}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ $\qquad h(x) = xe^x$ $\qquad k(x) = (x+1)e^{-2x+1}$

Exercice 2 ...et des dérivées de dérivées
Calculer la dérivée f' puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3$ $\qquad$ *b)* $f(x) = e^{2x+1}$ $\qquad$ *c)* $f(x) = e^{-x^2}$ $\qquad$ *d)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Exercice 3 Position relative de deux courbes.

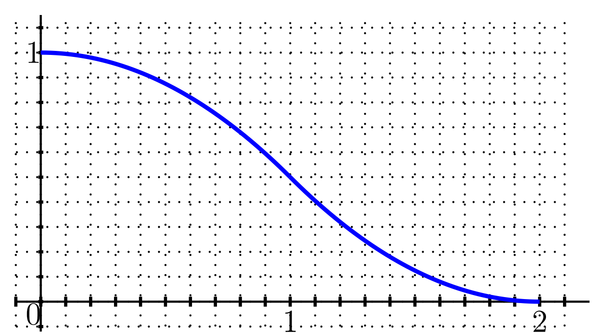
1. Étudier la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et de la droite $y = x + 1$.
Rerésenter graphiquement la situation.
2. Étudier la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.
Étudier les variations (en précisant les limites et éventuelles asymptotes) de ces fonctions et tracer les deux courbes.
3. Étudier la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^x$ et de la droite $y = x$.
Représenter graphiquement la situation.

Exercice 4 Retour sur la fonction carré et sa parabole
On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe et T_a la tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

a) Donner l'équation de la tangente T_1 puis étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec cette tangente.
b) Étudier de même la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec ses tangentes T_2, T_0, et T_{-1}.
c) Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses tangentes.
d) Généraliser les résultats précédents : montrer que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de toutes ses tangentes T_a.

Exercice 5 Pente sur un toboggan
La pente en un point à une courbe est la pente en ce point de sa tangente, ou encore le coefficient directeur de cette tangente.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

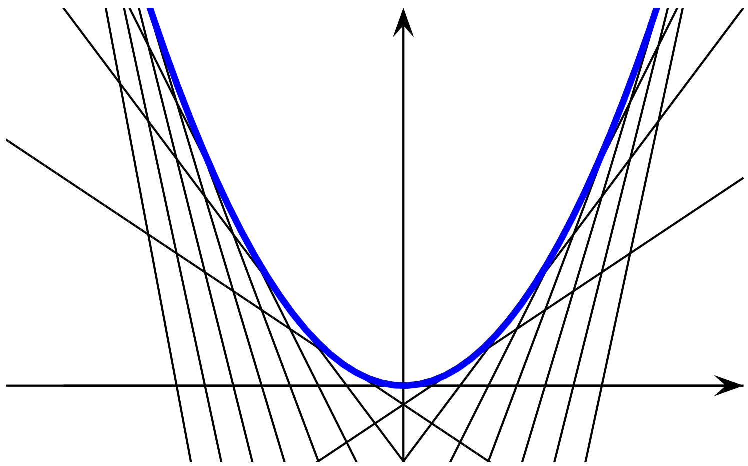


1. Justifier que f estcontinue sur $[0;2]$.
2. Donner une expression de la fonction dérivée f' de f. Montrer que f' est aussi continue sur $[0;2]$.
3. Donner la pente à la courbe en 0 et en 2.
4. Donner la pente de la courbe au point d'abscisse x. Comment varie cette pente ? Dresser son tableau de variation.
5. Une norme impose que la pente d'un tel toboggan ne dépasse pas 1,5 en valeur absolue. Est-ce le cas ici ?

II Convexité

Définition *On dit qu'une fonction est convexe sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes.*

Par exemple, la fonction carré est une fonction convexe :



Propriété *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I*
2. *la courbe représentative est entièrement située au-dessus de ses tangentes*
3. *f' est croissante sur I*
4. *f'' est positive sur I*

<u>Démonstration:</u> L'équivalence entre 1. et 2. est la définition, celle entre 3. et 4. provient simplement du lien entre le sens de variation d'une fonction (ici f') et de sa dérivée (donc $(f')' = f''$).

Supposons que la dérivée seconde de f est positive, c'est-à-dire que, pour tout $x \in I$, on a $f''(x) \geqslant 0$.
L'équation de la tangente T_a à la courbe de f en $x = a$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
On cherche à montrer que f est convexe donc que sa courbe est au-dessus de T_a, pour tout $a \in I$.

Pour étudier cette position relative, on définie la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \Big(f'(a)(x-a) + f(a)\Big)\end{aligned}$$

et on cherche donc à montrer qu'elle est positive.

Pour étudier cette fonction, on calcule sa dérivée, et même dérivée seconde :

$$\varphi(x) = f(x) - f'(a)x + f'(a)a + f(a)$$

donc

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$$

puis

$$\varphi''(x) = f''(x)$$

Ainsi, $\varphi'' = f'' \geqslant 0$ par hypothèse, et donc φ' est croissante.
On en déduit que

— Si $x > a$, on a $\varphi'(x) > \varphi'(a)$.
Or $\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$, et ainsi on vient de trouver que $\varphi'(x) > \varphi'(a) = 0$, et donc que φ est croissante, soit $\varphi(x) > \varphi(a)$.
Or $\varphi(a) = 0$ et on a donc,

$$\varphi(x) = f(x) - \Big(f'(a)(x-a) + f(a)\Big) > \varphi(a) = 0$$

qui est le résultat cherché.

— Si $x < a$, alors $\varphi'(x) < \varphi'(a) = 0$ et donc φ est décroissante et donc $\varphi(x) > \varphi(a) = 0$ et on obtient aussi le résultat souhaité.

$\square$

Exemples :

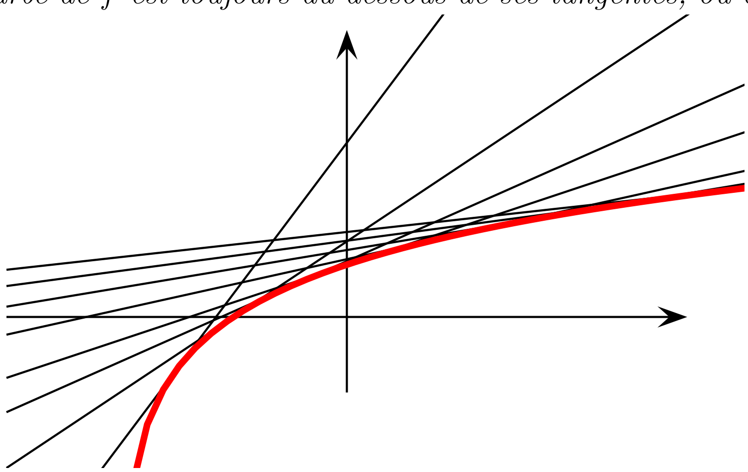
* *Pour la fonction carré $f(x) = x^2$, on a facilement $f'(x) = 2x$ puis $f''(x) = 2 > 0$, ce qui montre que la fonction carré est convexe.*

* *Pour la fonction inverse, sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, puis $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$ et la fonction inverse est aussi convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 6 Soit f la fonction exponentielle.

1. Donner la convexité de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $e^x > x$.

Définition *On dit qu'une fonction f est **concave** lorsque $-f$ est convexe, ce qui est donc équivalent à dire que la courbe de f est toujours au-dessous de ses tangentes, ou encore que $f'' \leqslant 0$.*



Définition *Un **point d'inflexion** est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.*

En un tel point, la fonction change de convexité : de convexe à concave, ou le contraire.

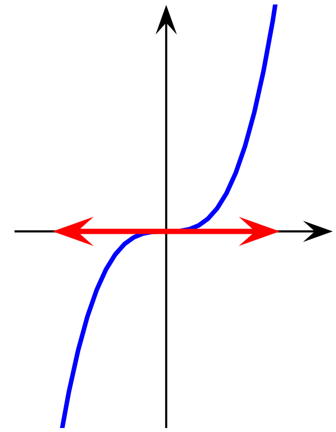
Propriété *Une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe.*

<u>Démonstration:</u> Par exmple $f''(x) \leqslant 0$, donc f concave, pour $x < a$ et $f''(x) \geqslant 0$, donc f convexe.
La fonction change ainsi de convexité en a. $\square$

Exemple à connaître : la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est telle que $f'(x) = 3x^2$ puis $f''(x) = 6x$.
On a $f''(0) = 0$ et

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

et donc en 0 la courbe de f admet un point d'inflexion.



Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0,5x + 1$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe de f.

Exercice 8 Même exercice avec la fonction $g(x) = xe^x$, puis avec la fonction $h(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 9 **QCM** Indiquer les bonnes réponses (une ou plusieurs par question).

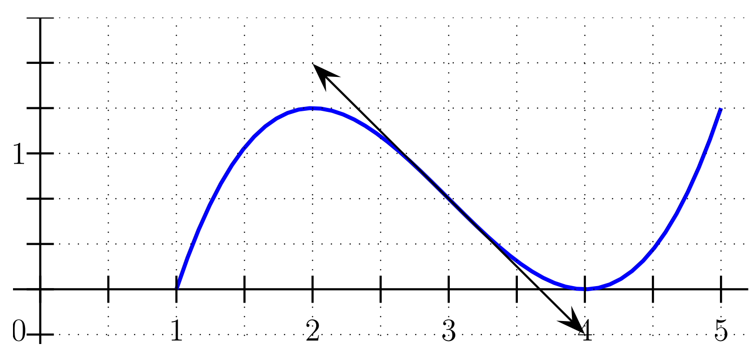
1. La fonction dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x^2 + 4x + 6)\, e^{5x+7}$ est $h'(x) =$:
   a) $(2x^2 + 4x + 6)\, e^{5x+7} + (4x + 4)e^{5x+7}$
   b) $2\,(5x^2 + 12x + 17)\, e^{5x+7}$
   c) $5e^{5x+7}\,(2x^2 + 4x + 6) + e^{5x+7}(4x + 4)$
   d) $5e^{5x+7}(4x + 4)$

2. La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ est :
   a) croissante sur $\mathbb{R}$
   b) croissante sur $[0; +\infty[$
   c) convexe sur $[0; +\infty[$
   d) convexe sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = (x^2 - 5x + 4)^2$ admet
   a) un point d'inflexion
   b) deux points d'inflexion
   c) trois points d'inflexion
   d) quatre points d'inflexion

4. La fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = e^{x^2 - 2x + 3}$:
   a) admet pour dérivée $m' : x \mapsto 2(x - 1)m(x)$
   b) admet pour dérivée $m' : x \mapsto e^{2x-2}$
   c) est concave sur $\mathbb{R}$
   d) est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 On considère la fonction g définie sur $[1; 5]$ dont la courbe représentative est tracée ci-contre.



1. Que vaut $g'(3)$?
   a) $g'(3) = -3$ b) $g'(3) = -1$
   c) $g'(3) = \dfrac{3}{2}$ d) $g'(3) = -\dfrac{3}{2}$

2. $g'(x) = 0$ pour : a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

3. La fonction g semble convexe sur : a) $[2; 4]$ b) $[1; 3]$ c) $[1; 2]$ d) $[3; 5]$

4. g'' étant la dérivée de g', on a : a) $g''(3) = 3$ b) $g''(2) = 0$ c) $g''(3) = 0$ d) $g''(4) = 0$

5. $g' \geqslant 0$ sur : a) $[1; 5]$ b) $[1; 2] \cup [4; 5]$ c) $[2; 4]$ d) $[2; 3[\cup]3; 4]$

Exercice 11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser les limites.
2. Étudier la convexité de f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

1. a) Déterminer la dérivée f' de f, puis sa dérivée seconde f''.
   b) Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire les variations de f'.
   c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f. Préciser les limites en l'infini.
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et la droite $\mathcal{D} : y = x + 1$.
   a) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   b) Déterminer les coordonnées des éventuels points de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 13 Soit h la fonction définie par l'expression $h(x) = e^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1. Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_h$ de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée h' de h.
3. Étudier les variations de h.
4. Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_4 à la courbe représentative de h aux points d'abscisses 1 et 4.
5. Déterminer les points d'intersection de T_1 et T_4.

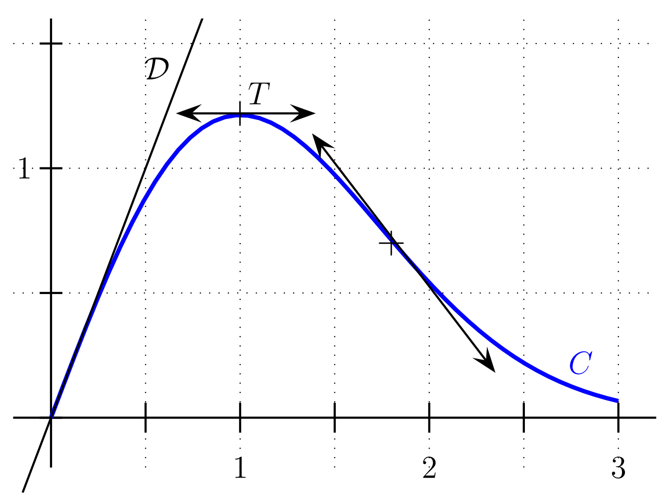
Exercice 14 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Déterminer $g'(x)$, puis montrer que g'' a pour expression $g''(x) = \dfrac{e^x\left(x^2 - 4x + 5\right)}{(1-x)^3}$.
2. En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.
4. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $e^x \geqslant -2x^2 + 3x - 1$.

Exercice 15 *D'après BAC ES, 2019*

On donne ci-contre la courbe C représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0;3]$. La droite $\mathcal{D}$ est tangente à C au point d'abscisse 0 et passe par le point $A(0,5\,;\,1)$ et par l'origine du repère.

La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

1. Déterminer une équation de $\mathcal{D}$.
2. Donner la valeur de $f'(1)$. Jusifier.
3. Proposer un intervalle sur lequel f semble concave.

Partie B La fonction f est définie sur $[0;3]$ apr l'expression $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0;3]$, $f'(x) = \left(2 - 2x^2\right)e^{-0,5x^2}$.

2. Étudier les variations de f sur $[0;3]$.
3. Déterminer la dérivée seconde de f et étudier sa convexité.

Partie C En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million. Que dire de cette affirmation ?