

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ par l'expression : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$.

- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
- Tracer T_0 et \mathcal{C}_f .

I - Continuité

Définition Une fonction f est dite continue en un point a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I .

Graphiquement, une fonction f continue sur I a une courbe représentative en "un seul morceaux", c'est-à-dire qu'on peut tracer sa courbe sans lever le stylo.

Exemple : La fonction carré $x \mapsto x^2$ est continue en tout point a de \mathbb{R} : pour tout réel a , $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$.

Exercice 2 On considère la fonction $x \mapsto E(x)$, appelée fonction "partie entière" et qui, à tout x réel, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple, $E(3,6) = 3$ et $E(-1,78) = -2$. Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $] -4; 4[$. La fonction partie entière est-elle continue ?

Propriété • Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .

- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+^* = [0; +\infty[$.
- Les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions cos et sin sont continues sur \mathbb{R} .
- La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Convention : On convient que, dans un tableau de variation, une flèche oblique indique que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

Théorème des valeurs intermédiaires (1)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et soit $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c entre a et b .

Remarque : On peut avoir $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$; dans ce cas, on doit simplement remplacer $f(a)$ et/ou $f(b)$ dans le théorème précédent par la limite de f en $\pm\infty$.

Théorème des valeurs intermédiaires (2) - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a; b]$; alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c sur $[a; b]$.

Remarque : On dit dans ce cas que f réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(a); f(b)]$.

Exercice 3 On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f .

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$. (on justifiera le résultat).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$		1
		↘	↗
		-5	

Exercice 4 Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 5 On considère la fonction h définie sur $] -1; +\infty[$ par $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.

1. Donner le tableau de variations de h .
2. En déduire que l'équation $\sqrt{x+1} = 3 - 2x$ admet une unique solution α dans $]-1; +\infty[$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

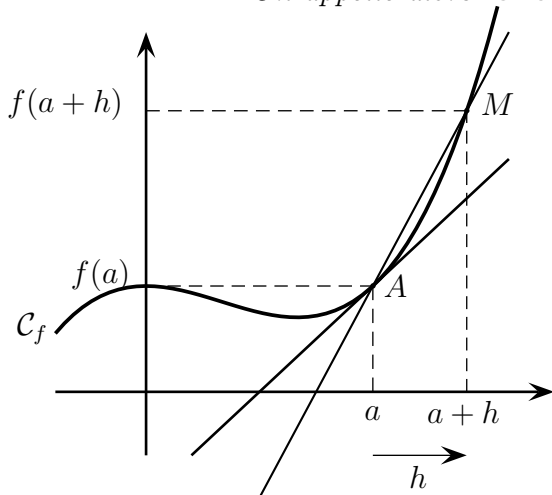
II - Dérivabilité et tangente

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On appelle **taux de variation** en $a \in I$, le nombre $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- La fonction f est dérivable en a si la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation existe. Dans ce cas, la limite est le **nombre dérivé de f en a** , noté $f'(a)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

- Une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel x de I . On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction $x \mapsto f'(x)$.



Le taux de variation est le coefficient directeur de la corde (AM) :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0, le point M tend vers le point A , et la corde (AM) "tend vers" la tangente à C_f en A ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(a)$$

le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

Autres notations On note souvent avec un " Δ " les variations, ainsi le coefficient directeur d'une droite passant par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ s'écrit selon la formule : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Le taux de variation de la fonction au point d'abscisse x s'écrit, selon cette notation, $\tau = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

La dérivée $f'(x)$ s'obtient en étudiant la limite du taux de variation lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, ce que l'on note encore : $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$ qui se lit, "la dérivée de f par rapport à x ".

Cette notation a été en premier introduite par Leibniz (1646-1716), mathématicien, physicien, logicien, philosophe, diplomate, homme de loi, allemand (ainsi que les termes de "fonction", "coordonnées", du symbole intégral " \int_a^b ", et des concepts de continuité et d'énergie cinétique (force vive), entre autres...

Exercice 6 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Montrer que f est dérivable en $x = 2$ et en déduire $f'(2)$.

Déterminer directement la fonction dérivée f' de f , et retrouver le résultat précédent.

Exercice 7 Soit la fonction h définie sur \mathbb{R}^+ par $h(x) = \sqrt{x}$.

Montrer que la fonction h n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 8 Montrer que la fonction $k : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable en 0. Que vaut $k'(0)$?

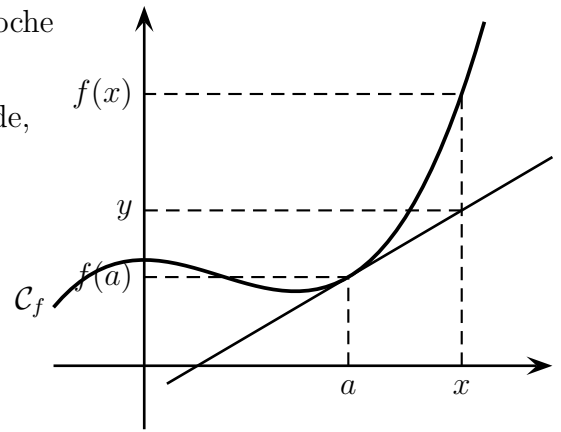
Approximation affine La tangente est "la droite la plus proche de \mathcal{C}_f " au voisinage de a .

Soit $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ telle que, d'après ce qui précède,

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

On a alors l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x - a)f'(a)}_{\text{équation de la tangente}} + (x - a)\varphi(x)$$



Propriété Soit une fonction dérivable en a , alors \mathcal{C}_f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Théorème Une fonction dérivable en un réel a est continue en a .

Démonstration: D'après ce qui précède, si f est dérivable en a , alors, avec φ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$
 $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varphi(x)$, et donc, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. \square

Attention! la réciproque est fautive : une fonction peut-être continue mais non dérivable en a .

Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont continues en $x = 0$ mais ne sont pas dérivables en $x = 0$.

Exercice 9 Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto x^{23} - \frac{12x^{11}}{5} + 3, 5x^7 - \frac{1}{x}$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x+2}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x+3}$
- $f_4 : x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 4x + 8}$
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $f_6(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 5}$
- $f_7(x) = x^2 \cos(x)$
- $f_8(x) = \cos(2x + 3)$
- $f_9(x) = (2x^2 + 3x - 2)^7$
- $f_{10}(x) = \sqrt{4 - x^2}$
- $f_{11}(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
- $f_{12}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$
- $f_{13}(x) = \left(\frac{3x - 4}{x - 1}\right)^3$
- $f_{14}(x) = \sqrt{3x^2 - \frac{1}{9x}}$
- $f_{15}(x) = \sqrt{2 + \cos^2(2x + 1)}$

III - Etude de fonctions

Théorème Soit f une fonction dérivable sur I , alors f est continue sur I et :

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur I ;
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur I ;
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, f est constante sur I .

Théorème Si une fonction f dérivable sur I admet un extremum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.

La réciproque est fautive. La dérivée d'une fonction peut s'annuler sans que cela ne corresponde à un extremum pour la fonction.

Par exemple, soit $f : x \mapsto x^3$, vérifie $f'(0) = 0$, mais $f(0)$ n'est pas un extremum pour la fonction cube (qui est strictement croissante sur \mathbb{R}).

Exercice 10 Déterminer les extrema éventuels de $f : x \mapsto x + \frac{2}{x}$.

Vérifier que ces points sont bien des extrema, et préciser s'il s'agit de minima ou de maxima.

Exercice 11 f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$. Montrer que -6 est un minorant de f sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 12 f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + mx}{x^2 - 1}$, où m est un réel.

Pour quelles valeurs de m , f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

Exercice 13 f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = 9 + \frac{12}{x-3}$.

- a) Etudier les variations de g et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
b) Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
c) Indiquer, par lecture graphique, le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $h(x) = (x-3)[f(x) - g(x)]$.
a) Etudier les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
c) En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions.
d) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chaque solution.

Exercice 14 On note (E) l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et (I) l'inéquation $x^3 - 15x - 4 > 0$.

1. Résolution graphique

- a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $x^2 - 15 = \frac{4}{x}$
b) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - 15$ et $x \mapsto \frac{4}{x}$.
c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) .
Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?
Encadrer chacune des autres solutions α et β (avec $\alpha < \beta$) par deux entiers consécutifs.
- d) Démontrer que l'inéquation (I) s'écrit sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 15 > \frac{4}{x}$, et sur $] - \infty; 0[$, $x^2 - 15 < \frac{4}{x}$.

2. Etude d'une fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 15x - 4$. \mathcal{C}_f est sa courbe représentative.

- a) Justifier la continuité de f sur \mathbb{R} .
b) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
c) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de \mathcal{C}_f .
e) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans \mathbb{R} .
f) Donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions.
g) Etudier le signe de la fonction f . En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) .

3. Méthode algébrique

- a) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel x , $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.
b) Résoudre alors (E) et (I) .

Exercice 15 f est la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis sa dérivée seconde f'' .
2. a) Déterminer les variations de la fonction f' , et dresser le tableau de variation de f' .
b) Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $] - \infty; -1]$. Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2} .
3. a) Déterminer le signe de la fonction f' , puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
b) Montrer que $f(c) = \frac{3c(4-c)}{4}$
c) Déterminer le nombre de racines du polynôme f .