Compléments sur les fonctions - Convexité

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$ par l'expression : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
4. Tracer T_0 et $\mathcal{C}_f$ (avec tous les élements graphiques trouvés précédemment).

Exercice 2 On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$. (on justifiera le résultat).

x	$-\infty$		2		10		$+\infty$
f	3	↗	8	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice 3 Démontrer que l'équation $x^3+3x=5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 4 Démontrer que l'équation $e^x=2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 5 On considère la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x)=2x-3+\sqrt{x+1}$.

1. Donner le tableau de variations de h.
2. En déduire que l'équation $\sqrt{x+1}=3-2x$ admet une unique solution α dans $[-1;+\infty[$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

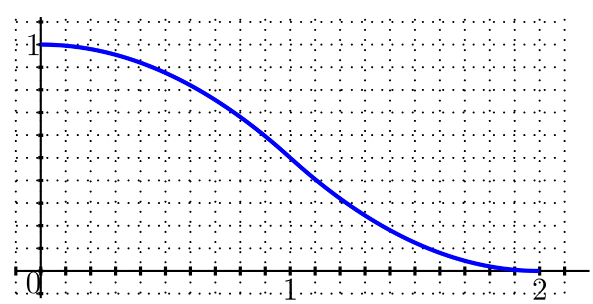
Exercice 6 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x)=x^2+3x-1$.
Montrer que f est dérivable en $x=2$ et en déduire $f'(2)$.
Déterminer directement la fonction dérivée f' de f, et retrouver le résultat précédent.

Exercice 7 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x)=\sqrt{x}$.
Montrer que la fonction h n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 8 Montrer que la fonction $k : x\mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable en 0. Que vaut $k'(0)$?

Exercice 9 **Pente sur un toboggan**
La pente à une courbe en un point est la pente en ce point de sa tangente, ou encore le coefficient directeur de cette tangente.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{x^2}{2}+1 & \text{si } x\leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2}-2x+2 & \text{si } x\geqslant 1\end{array}\right.$$



1. Justifier que f estcontinue sur $[0;2]$.
2. Donner une expression de la fonction dérivée f' de f. Montrer que f' est aussi continue sur $[0;2]$. Interpréter graphiquement cette propriété.
3. Donner la pente à la courbe en 0 et en 2.
4. Donner la pente de la courbe au point d'abscisse x. Comment varie cette pente ? Dresser son tableau de variation.
5. Une norme impose que la pente d'un tel toboggan ne dépasse pas 1,5 en valeur absolue. Est-ce le cas ici ?

Exercice 10 Déterminer les extrema de $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$.

Exercice 11 f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$. Montrer que -6 est un minorant de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12 f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx}{x^2 - 1}$, où m est un réel.
Pour quelles valeurs de m, f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

Exercice 13 On note (E) l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et (I) l'inéquation $x^3 - 15x - 4 > 0$.

1. Résolution graphique

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $x^2 - 15 = \dfrac{4}{x}$

b) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - 15$ et $x \mapsto \dfrac{4}{x}$.

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E).
Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?
Encadrer chacune des autres solutions α et β (avec $\alpha < \beta$) par deux entiers consécutifs.

d) Démontrer que l'inéquation (I) s'écrit sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 15 > \dfrac{4}{x}$, et sur $]-\infty; 0[$, $x^2 - 15 < \dfrac{4}{x}$.

2. Etude d'une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

a) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

e) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

f) Donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions.

g) Etudier le signe de la fonction f. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).

3. Méthode algébrique

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$.

b) Résoudre alors (E) et (I).

Exercice 14 f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''.
2. a) Déterminer les variations de la fonction f', et dresser le tableau de variation de f'.
   b) Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty; -1]$. Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2}.
3. a) Déterminer le signe de la fonction f', puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b) Montrer que $f(c) = \dfrac{3c(4 - c)}{4}$
   c) Déterminer le nombre de racines du polynôme f.

Exercice 15 **Des calculs de dérivées ... et des dérivées de dérivées**
Calculer la dérivée f' puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3$ *b)* $f(x) = e^{2x+1}$ *c)* $f(x) = e^{-x^2}$ *d)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Exercice 16 **Position relative de deux courbes.**

1. Représenter graphiquement la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et la droite $d : y = x + 1$.
   Étudier la position relative de la courbe et de la droite.
2. Étudier la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.
   Étudier les variations (en précisant les limites et éventuelles asymptotes) de ces fonctions et tracer les deux courbes.
3. Étudier la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^x$ et de la droite $y = x$.
   Représenter graphiquement la situation.

Exercice 17 **Retour sur la fonction carré et sa parabole**
On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe et T_a la tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

a) Donner l'équation de la tangente T_1 puis étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec cette tangente.
b) Étudier de même la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec ses tangentes T_2, T_0, et T_{-1}.
c) Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses tangentes.
d) Généraliser les résultats précédents : montrer que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de toutes ses tangentes T_a.

Exercice 18 Soit f la fonction exponentielle.

1. Donner la convexité de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $e^x > x$.

Exercice 19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0,5x + 1$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe de f.

Exercice 20 Même exercice avec la fonction $g(x) = xe^x$, puis avec la fonction $h(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 21 **QCM** Indiquer les bonnes réponses (une ou plusieurs par question).

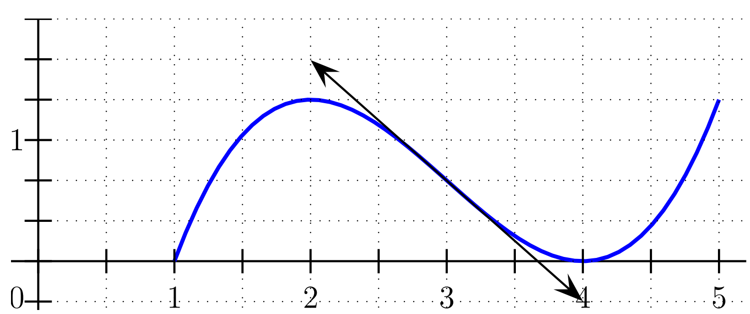
1. La fonction dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x^2 + 4x + 6)\, e^{5x+7}$ est $h'(x) =$:
   a) $(2x^2 + 4x + 6)\, e^{5x+7} + (4x + 4)e^{5x+7}$
   b) $2\,(5x^2 + 12x + 17)\, e^{5x+7}$
   c) $5e^{5x+7}\,(2x^2 + 4x + 6) + e^{5x+7}(4x + 4)$
   d) $5e^{5x+7}(4x + 4)$

2. La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ est :
   a) croissante sur $\mathbb{R}$
   b) croissante sur $[0; +\infty[$
   c) convexe sur $[0; +\infty[$
   d) convexe sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right)^2$ admet
   a) un point d'inflexion
   b) deux points d'inflexion
   c) trois points d'inflexion
   d) quatre points d'inflexion

4. La fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = e^{x^2-2x+3}$:
   a) admet pour dérivée $m' : x \mapsto 2(x - 1)m(x)$
   b) admet pour dérivée $m' : x \mapsto e^{2x-2}$
   c) est concave sur $\mathbb{R}$
   d) est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 On considère la fonction g définie sur $[1; 5]$ dont la courbe représentative est tracée ci-contre.



1. Que vaut $g'(3)$?
   a) $g'(3) = -3$ b) $g'(3) = -1$
   c) $g'(3) = \dfrac{3}{2}$ d) $g'(3) = -\dfrac{3}{2}$

2. $g'(x) = 0$ pour : a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$
3. La fonction g semble convexe sur : a) $[2; 4]$ b) $[1; 3]$ c) $[1; 2]$ d) $[3; 5]$
4. g'' étant la dérivée de g', on a : a) $g''(3) = 3$ b) $g''(2) = 0$ c) $g''(3) = 0$ d) $g''(4) = 0$
5. $g' \geqslant 0$ sur : a) $[1; 5]$ b) $[1; 2] \cup [4; 5]$ c) $[2; 4]$ d) $[2; 3[\cup]3; 4]$

Exercice 23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser les limites.

2. Étudier la convexité de f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

1. a) Déterminer la dérivée f' de f, puis sa dérivée seconde f''.
   b) Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire les variations de f'.
   c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f. Préciser les limites en l'infini.
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et la droite $\mathcal{D} : y = x + 1$.
   a) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   b) Déterminer les coordonnées des éventuels points de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 25 Soit h la fonction définie par l'expression $h(x) = e^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

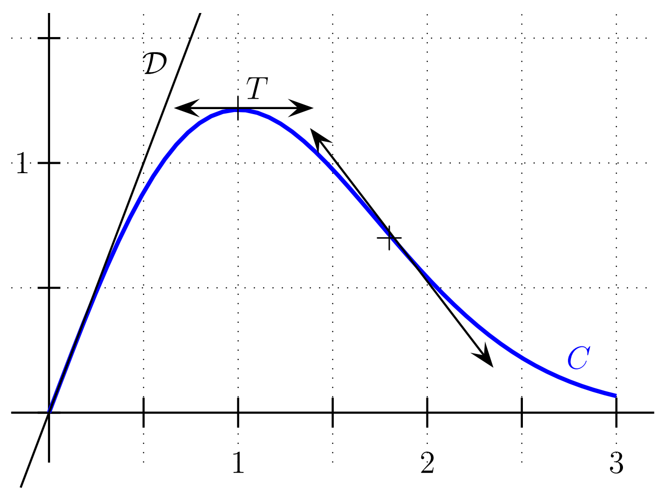
1. Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_h$ de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée h' de h.
3. Étudier les variations de h.
4. Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_4 à la courbe représentative de h aux points d'abscisses 1 et 4.
5. Déterminer les points d'intersection de T_1 et T_4.

Exercice 26 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Déterminer $g'(x)$, puis montrer que g'' a pour expression $g''(x) = \dfrac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(1-x)^3}$.
2. En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.
4. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $e^x \geqslant -2x^2 + 3x - 1$.

Exercice 27 *D'après BAC ES, 2019*

On donne ci-contre la courbe C représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0;3]$. La droite $\mathcal{D}$ est tangente à C au point d'abscisse 0 et passe par le point $A(0,5\,;\,1)$ et par l'origine du repère.
La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

1. Déterminer une équation de $\mathcal{D}$.
2. Donner la valeur de $f'(1)$. Jusifier.
3. Proposer un intervalle sur lequel f semble concave.

Partie B La fonction f est définie sur $[0;3]$ apr l'expression $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0;3]$, $f'(x) = \left(2-2x^2\right)e^{-0,5x^2}$.
2. Étudier les variations de f sur $[0;3]$.
3. Déterminer la dérivée seconde de f et étudier sa convexité.

Partie C En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million. Que dire de cette affirmation ?