Combinatoire et dénombrement

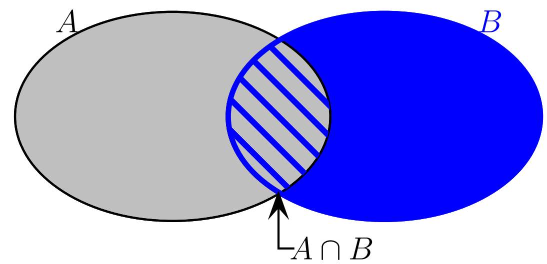
Terminale générale
spécialité maths

I Cardinal d'ensembles

Définition *Le **cardinal** d'un ensemble A, noté $Card(A)$, est le nombre d'éléments qu'il contient*

Par exemple, si $A = \{1; 2; 3\}$, alors Card $(A) = 3$; pour $B = \{bleu, vert, rouge\}$, aussi Card $\{B) = 3$.

1) Cardinal et réunion



Propriété *Pour deux ensembles A et B, on a*

$$Card\,(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card\,(A \cap B)$$

Exercice 1 Dans un groupe de 20 personnes, 15 aiment lire et 8 faire du sport.
Combien de personnes aiment à la fois lire et faire du sport ? combien n'aiment que lire ?

Définition *Deux ensembles sont disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

Propriété *Si A et B sont deux ensembles disjoints, alors on a* $Card\,(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
Plus généralement, pour des ensembles A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis deux à deux disjoints, alors on a

$$Card\,(A_1 \cup A_2 \cup \dots\ A_n) = Card\,(A_1) + Card\,\{A_2) + \cdots + Card\,\{A_2) = \sum_{i=1}^{n} Card\,(A_i)$$

2) Produit cartésien

Définition *Le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ ("A croix B"), constitué des coupes $(x; y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.*
Plus formellement, on a

$$A \times B = \Big\{(x; y)\,,\ x \in A\,,\ y \in B\Big\}$$

On note ensuite $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, ...

Par exemple pour $A = \{1; 2\}$ et $B = \{3; 4\}$, on a $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

On note $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui est l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Propriété *Pour A et B deux ensembles finis, on a $Card\,(A \times B) = Card\,(A) \times Card\,(B)$*

Définition *Un n-uplet d'un ensemble A est un élément de A^n.*
Pour $n = 2$, un 2-uplet, élément de $A^2 = A \times A$, est aussi un couple.
Pour $n = 3$, un 3-uplet, élément de $A^3 = A \times A \times A$, est aussi un triplet.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des couples (coordonnées des points et vecteurs dans le plan), par exemple $(1; 2) \in \mathbb{R}^2$ et $(2; 1) \in \mathbb{R}^2$ (l'ordre compte !).
Les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont des triplets (coordonnées des points et vecteurs dans l'espace).

Propriété *Pour un ensemble fini et n un entier naturel $Card(A^n) = Card(A)^n$.*

Exercice 2 Soit $E = \{0; 1\}$. Donner tous les 3-uplets (ou triplets) de E. Combient y en a-t-il ?

Exercice 3 Soit E et F deux ensembles disjoints composés respetivement de 4 et 5 éléments. Calculer le nombre d'éléments de $E \cup F$, $E \times F$, E^2, F^2 et E^3.

Exercice 4 « Cent mille milliards de poèmes » est un recueil de poèmes écrit par Raymond Queneau en 1961. Ce livre contient 10 pages, dont chacune est découpée en 14 vers interchangeables. Le lecteur compose ainsi un poème en choisissant les vers les uns après les autres.
Le titre est-il exact ?

Commenter la préface de R. Queneau :« *Ce petit ouvrage permet à tout un chacun de composer à volonté cent mille milliards de sonnets, tous réguliers bien entendu. C'est somme toute une sorte de machine à fabriquer des poèmes, mais en nombre limité ; il est vrai que ce nombre, quoique limité, fournit de la lecture pour près de deux cents millions d'années* »(NB : Queneau compte 45s pour lire un sonnet, 15s pour changer les volets).

Exercice 5

1. Un code PIN de smartphone est composé de 4 chiffres. Combien de codes PIN différents peut-on former ?
2. Un mot de passe est composé de 7 caractères : 5 lettres puis 2 chiffres. Combien de mots différents existe-t-il ?
3. Un mot de passe est composé de 7 caractères, lettres ou chiffres. Combien de mots différents existe-t-il ?

II Arrangements et permutations

Définition *Soit A un ensemble non vide à n éléments et k un entier naturel, $k \leqslant n$.*
*Un **arrangement** de k éléments de A, ou k-**arrangement** est un k-uplet d'éléments **distincts** de A.*

Par exemple, si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, alors $(1; 3; 4)$ et $(3; 1; 2)$ sont des arrangements de trois éléments de A.

Dans une course de 10 chevaux, le tiercé est un 3-arrangement (ou triplet), le quarté est un 4-arrangement (ou quadruplet).

Définition *On appelle factorielle de n, noté n!, le nombre*

$$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Propriété *Soit A un ensemble à n éléments.*
Le nombre de ***permutation****, ou n-arrangement des n éléments de A est $n!$.*
Le nombre de k-arrangements, ou k-uplets, de A est

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Démonstration:</u>

- Pour arranger tous les n éléments de A, on a n possibilités pour le 1er élément, puis $n-1$ possibilités pour le 2ème, ..., puis 2 possibilités pour l'avant dernier et enfin une seule possibilité pour le dernier, soit au total $n! = n \times (n-1) \times \ldots 2 \times 1$ possibilités.
- Pour un k-arrangement on procède de même : on a n possibilités pour le 1er élément, puis $n-1$ possibilités pour le 2ème, puis $n-2$ possibilités pour le 3ème, ..., puis $n-k+1$ possibilités pour le $k$ème, soit
$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$
Enfin, on peut réécrire ce produit
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n^k &= n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \\ &= n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times \frac{(n-k) \times \ldots 2 \times 1}{(n-k) \times \ldots 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}\end{aligned}$$

□

Par exemple l'ensemble $A = \{1;2;3\}$ a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations : $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(2;3;1)$, $(3;1;2)$ et $(3;2;1)$.

Dans une course de 10 chevaux, il y a $\mathcal{A}_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!}$ tiercés possibles et $\mathcal{A}_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!}$ quartés possibles.

Exercice 6

1. Combien de couples de chiffres existe-t-il ? Combien de nombres à 2 chiffres existe-t-il ?
2. Combien de triplets de chiffres existe-t-il ? Combien de nombres à 2 chiffres existe-t-il ?

Exercice 7 Combien de mots peut-on former avec les lettres M, A, T, H, S ?
Combien d'anagrammes de ce mot existe-t-il ?

III Combinaisons

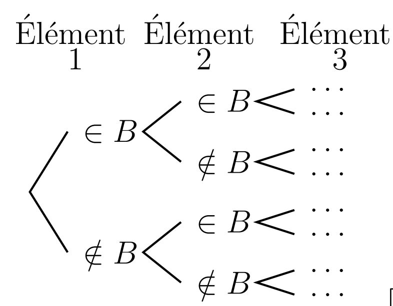
1) Parties d'un ensemble

Propriété *Une partie d'un ensemble est un sous-ensemble.*
Si $Card(A) = n$, alors il y a 2^n parties de A.

Par exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $\{1\}$, $\{1;2\}$, $\{2;3\}$ sont des parties, ou sous-ensembles, de A.
On peut former ainsi $2^3 = 8$ parties de A.

<u>Démonstration:</u>
Pour construire une partie B de A, on considère successivement tous les éléments de A.
Le 1er élément de A est, ou non, dans la partie ; le 2ème élément de A est alors, ou non, aussi dans la partie ;
On dénombre ainsi $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ possibilités ...

Si $E = \{0;1\}$, alors il y a autant de parties de A que de n-uplets de E^n.



□

2) Nombre de combinaisons

Définition *Une* ***combinaison*** *de k éléments d'un ensemble A est une partie de cardinal k.*
Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments d'un ensemble A est noté $\binom{n}{k}$.
Ce nombre s'appelle ***coefficient binomial*** *et se lit "k parmi n".*

Par exemple, il y a $\binom{35}{2}$ couples de délégués possibles dans une classe 35 élèves, et on peut constituer $\binom{35}{6}$ groupes différents de 6 élèves.

Exercice 8 On considère l'ensemble $A=\Big\{a;b;c;d;e\Big\}$.
Donner tous les sous-ensembles de A de cardinal 3, et en déduire $\binom{5}{3}$.

Propriété *Pour n et k deux entiers naturels, avec $k\leqslant n$, on a*

- $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ • $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- *Le* ***Triangle de Pascal*** *contient les coefficients binomiaux :*

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			...	...		

Relation de Pascal :

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

<u>Démonstration:</u> On démontre la relation de Pascal par deux méthodes.

— **Méthode combinatoire** $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments parmi un ensemble A qui en contient n.
On considère un élément x de A. Pour constituer une partie à k éléments il y a deux façons :
— soit cette partie contient x ; il y a alors $\binom{n-1}{k-1}$ façons de choisir les $k-1$ autres élements parmi les $n-1$ restants
— soit cette partie ne contient pas x ; il y a alors $\binom{n-1}{k}$ façons de choisir les k élements parmi les $n-1$ restants
Au total, on a bien la relation de Pascal $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

— **Méthode calculatoire** En utilisant la formule algbrique $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}+\frac{(n-1)!}{k!\big((n-1)-k\big)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big(n-k)\big)!}+\frac{(n-1)!}{k!\big(n-k-1\big)!}\end{aligned}$$

puis, en factorisant et mettant sur le même dénominateur

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)k}\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)k}\right)\\
&= \frac{(n-1)!\times n}{\big[(k-1)!\times k\big]\,\big[(n-k-1)!\times(n-k)\big]}=\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

□

Exercice 9 Calculer (sans calculatrice, éventuellement avec le triangle de Pascal, puis avec la calculatrice) :

1. $\binom{3}{2}$; $\binom{4}{2}$; $\binom{5}{3}$; $\binom{10}{1}$; $\binom{8}{2}$; $\binom{8}{6}$; $\binom{60}{59}$; $\binom{10}{4}$; $\binom{10}{5}$; $\binom{10}{6}$; $\binom{11}{6}$
2. $A=-\binom{5}{0}+\binom{5}{1}-\binom{5}{2}+\binom{5}{3}-\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

Exercice 10

1. Une grille de jeu comporte 20 nombres. Pour jouer à ce jeu, on coche 3 cases dans cette grille.
   Combien de grilles différentes existe-t-il ?
2. Une autre version de ce jeu est composée de deux grilles : la précédente avec ces 20 nombres accolées à une seconde grille comportant les lettres de A à J.
   Pour jouer à ce jeu, on choche 3 cases de la grille numérique et 2 cases de celle alphabétique.
   De combien de façons différentes peut-on jouer à ce jeu ?

Exercice 11 À l'entrée en première, un élève doit choisir trois spécialités dans une liste de neuf proposées. Combien de combinaisons différentes existe-t-il ?

Exercice 12 On lance une pièce de monnaie n fois successivement.

1. Construire un arbre pour $n=2$ et $n=3$. Quel est le nombre d'issues de cette expérience ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois Pile sur $n=3$ lancers ? sur $n=4$ lancers ? sur $n=10$ lancers ?

Exercice 13 Montrer que, pour tout entier n, $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$:

1. par une méthode calculatoire, en utilisant la formule du coefficient binomial.
2. par une méthode combinatoire, à l'aide d'un argument de dénombrement.

Exercice 14 Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n=\binom{2n}{n}$ est strictement croissante.

Propriété $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Démonstration: Soit A un ensemble à n éléments.
$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de A à k éléménts. Quand on fait la somme de tous ces nombres on obtient le nombre de parties de A, qu'on sait être égal à 2^n.

Plus précisément, en notant A_k l'ensemble des parties de A composées de k éléments, on a par définition $\text{Card}\,(A_k)=\binom{n}{k}$. Ces ensembles A_k sont par ailleurs deux à deux disjoints (les parties n'ont pas le même nombre d'éléments) et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A. On a donc

$$2^n=\text{Card}\,(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=0}^{n}\text{Card}\,(A_k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

□

Propriété ***Binôme de Newton***
Pour tous a et b et tout entier naturel n, on a

$$(a+n)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

Exemple : On utilise le triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux, et on a pour les premières puissances :

$$\begin{array}{lcllllllll}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & 1a & + & 1\,b \\
(a+b)^2 & = & 1a^2 & + & 2\,ab & + & 1\,b^2 \\
(a+b)^3 & = & 1a^3 & + & 3\,a^2b & + & 3\,ab^2 & + & 1\,b^3 \\
(a+b)^4 & = & 1a^4 & + & 4\,a^3b & + & 6\,a^2b^2 & + & 4\,ab^3 & + & 1\,b^4 \\
\dots & & \dots
\end{array}$$

Démonstration: On peut démontrer cette formule par 2 méthodes : calulatoire et combinatoire.

— **Méthode calculatoire**

Exercice 15 Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.

— **Méthode combinatoire** On détaille :

$$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

Après développement, chaque terme contient un terme, a ou b, de chaque parenthèse et s'écrit donc sous la forme a^kb^{n-k} : on prend k fois un a et donc $n-k$ fois un b dan les parenthèses restantes.
Il y a maintenant $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k parenthèses où on a pris un a.
Le développement de $(a+n)^n$ est alors la somme de tous ces termes.

□