

Exercice 1 Dans un groupe de 20 personnes, 15 aiment lire et 8 faire du sport.
Combien de personnes aiment à la fois lire et faire du sport ? combien n'aiment que lire ?

Exercice 2 Soit $E = \{0; 1\}$. Donner tous les 3-uplets (ou triplets) de E . Combien y en a-t-il ?

Exercice 3 Soit E et F deux ensembles disjoints composés respectivement de 4 et 5 éléments. Calculer le nombre d'éléments de $E \cup F$, $E \times F$, E^2 , F^2 et E^3 .

Exercice 4 « Cent mille milliards de poèmes » est un recueil de poèmes écrit par Raymond Queneau en 1961. Ce livre contient 10 pages, dont chacune est découpée en 14 vers interchangeables. Le lecteur compose ainsi un poème en choisissant les vers les uns après les autres.
Le titre est-il exact ?

Commenter la préface de R. Queneau : « *Ce petit ouvrage permet à tout un chacun de composer à volonté cent mille milliards de sonnets, tous réguliers bien entendu. C'est somme toute une sorte de machine à fabriquer des poèmes, mais en nombre limité ; il est vrai que ce nombre, quoique limité, fournit de la lecture pour près de deux cents millions d'années* » (NB : Queneau compte 45s pour lire un sonnet, 15s pour changer les volets).

Exercice 5

1. Un code PIN de smartphone est composé de 4 chiffres. Combien de codes PIN différents peut-on former ?
2. Un mot de passe est composé de 7 caractères : 5 lettres puis 2 chiffres. Combien de mots différents existe-t-il ?
3. Un mot de passe est composé de 7 caractères, lettres ou chiffres. Combien de mots différents existe-t-il ?

Exercice 6

1. Combien de couples de chiffres existe-t-il ? Combien de nombres à 2 chiffres existe-t-il ?
2. Combien de triplets de chiffres existe-t-il ? Combien de nombres à 3 chiffres existe-t-il ?

Exercice 7 Combien de mots peut-on former avec les lettres M, A, T, H, S ?
Combien d'anagrammes de ce mot existe-t-il ?

Exercice 8 On considère l'ensemble $A = \{a; b; c; d; e\}$.
Donner tous les sous-ensembles de A de cardinal 3, et en déduire $\binom{5}{3}$.

Exercice 9 Calculer (sans calculatrice, éventuellement avec le triangle de Pascal, puis avec la calculatrice) :

1. $\binom{3}{2}$; $\binom{4}{2}$; $\binom{5}{3}$; $\binom{10}{1}$; $\binom{8}{2}$; $\binom{8}{6}$; $\binom{60}{59}$; $\binom{10}{4}$; $\binom{10}{5}$; $\binom{10}{6}$; $\binom{11}{6}$
2. $A = -\binom{5}{0} + \binom{5}{1} - \binom{5}{2} + \binom{5}{3} - \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

Exercice 10

1. Une grille de jeu comporte 20 nombres. Pour jouer à ce jeu, on coche 3 cases dans cette grille.
Combien de grilles différentes existe-t-il ?
2. Une autre version de ce jeu est composée de deux grilles : la précédente avec ces 20 nombres accolées à une seconde grille comportant les lettres de A à J.
Pour jouer à ce jeu, on coche 3 cases de la grille numérique et 2 cases de celle alphabétique.
De combien de façons différentes peut-on jouer à ce jeu ?

Exercice 11 À l'entrée en première, un élève doit choisir trois spécialités dans une liste de neuf proposées. Combien de combinaisons différentes existe-t-il ?

Exercice 12 On lance une pièce de monnaie n fois successivement.

1. Construire un arbre pour $n = 2$ et $n = 3$. Quel est le nombre d'issues de cette expérience ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois Pile sur $n = 3$ lancers ? sur $n = 4$ lancers ? sur $n = 10$ lancers ?

Exercice 13 Montrer que, pour tout entier n ,
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} :$$

1. par une méthode calculatoire, en utilisant la formule du coefficient binomial.
2. par une méthode combinatoire, à l'aide d'un argument de dénombrement.

Exercice 14 Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \binom{2n}{n}$ est strictement croissante.

Exercice 15 Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.