Loi binomiale - Compléments

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 Surbooking

Un avion a une capacité de 100 personnes. Un étude statistique montre que la probabilité qu'une personne qui a réservé son billet ne se présente pas à l'embarquement est de 5%.

1. 100 billets, un par place, ont été vendus.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement.
   a) Préciser la loi de probabilité de X.
   b) Calculer la probabilité que l'avion soit plein.
   c) Calculer la probabilité pour qu'il reste au moins une place libre dans cet avion.
   d) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins cinq places libres dans l'avion.
2. Comme on estime que la probabilité que cet avion ne soit pas plein est importante, on décide de vendre 105 billets pour ce vol. Calculer la probabilité qu'aucun client ne se retrouve sans place.
3. Les 105 billets sont vendus au prix unitaire de 300 euros.
   Lorsqu'un client a réservé, se présente à l'embarquement et se retrouve sans place, et afin d'éviter tout mécontentement, on lui rembourse le double du prix de son billet, soit 600 euros.

On note Z la variable aléatoire égale au revenu de la compagnie aérienne sur ce vol.

Compléter le tableau ci-contre.

Calculer $E(Z)$ et interpréter.

Nombre de personnes à l'embarquement	$\leqslant 100$	101	102	103	104	105
z_i						
$P(Z = z_i)$						

Exercice 2 Fluctuation de l'aléatoire et prise de décision

On lance une pièce équilibrée 100 fois successivement.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus. Préciser la loi de X et déterminer les plus petits entiers a et b possibles tels que $\begin{cases} P(X \leqslant a) > 0,025 \\ P(X \leqslant b) \geqslant 0,975 \end{cases}$

   On note $I = [a; b]$. En déduire que $P(X \in I)$.

   Définition L'intervalle I s'appelle l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

2. J'ai lancé une pièce 100 fois et ai obtenu 65 fois pile. Qu'en penser ?

Définition Lorsqu'on répète n fois la même expérience aléatoire, on obtient une série de n succès ou échecs que l'on appelle échantillon de taille n.
Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, les proportions de succès ou d'échecs pour chaque échantillon varient d'un échantillon à l'autre.
Ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

Par exemple, je lance 100 fois une pièce et j'obtiens 54 fois pile. Je la relance 100 fois et j'obtiens dans ce nouvel échantillon 42 fois pile. Dans une 3ème série, ou 3ème échantillon, j'obtiens 60 fois pile. . . . etc . . .
Les expériences étant aléatoires, il est normal que les proportions de pile varient, ou **fluctuent**, d'un échantillon à l'autre.

Néanmoins, si la pièce est équilibrée, obtenir un nombre de pile *très faible* (inférieur à 10 ? à 20 ? 30 ?) ou *très grand* (supérieur à 80 ? 90 ? ...) est *très rare*, au point qu'on peut le considérer comme *anormal/impossible*.

Les limites de fluctuation *attendues normalement* sont données par l'intervalle de fluctuation. Le nombre de pile appartient à cet intervalle avec une probabilité d'environ 95%, et il est donc *rare* qu'il n'y appartienne pas.

Par exemple, 65 fois pile n'est pas dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, et on peut donc **affirmer**, avec un risque d'erreur de 5%, que l'hypothèse faite : la pièce est équilibrée, est fausse : on affirme donc que la pièce est truquée.

Bien sûr, on peut reprendre tout ce qui précède avec un seuil de 99%, donc risque d'erreur de 1%, ou toute autre valeur.

Exercice 3 Aux abords d'une ville est venue s'implanter, il y a cinq ans, une usine chimique. La toxicité des substances manipulées et produites par cette usine est depuis grandement source de polémique.
Selon l'Institut national des études démographiques (INED), il naît normalement 105 garçons pour 100 filles, soit une proportion de garçons $p = \dfrac{105}{205} \simeq 0,51$. Dans la maternité de cette ville, sont nés depuis ces cinq dernières années 693 enfants, dont "seulement" 332 garçons. Les opposants à cette usine citent cette "faible" quantité de naissances de garçons comme une conséquence néfaste de l'exploitation de cette usine.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de garçons sur 693 naissances.
   Préciser la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation de X au seuil de 95% et conclure.

Exercice 4 Deux entreprises A et B recrutent leur personnel dans un bassin d'emploi où il y a autant d'hommes que de femmes. L'entreprise A emploie 60 personnes dont 26 femmes, tandis que l'entreprise B emploie 1050 personnes dont 480 femmes.

1. Calculer les proportions de femmes employées dans chaque entreprise.
   Quelle entreprise semble au mieux respecter la parité homme-femme ?
2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de femmes dans un échantillon de 60 personnes et Y la variable aléatoire égale au nombre de femmes dans un échantillon 1050 personnes.
   Préciser les lois de probabilités de X et Y.
3. Déterminer les intervalles de fluctuation de X et Y au seuil de 95%.
   Les deux entreprises respectent-elles la parité au seuil d'erreur de 5 % ?

Exercice 5 Dans une ville, lors d'un sondage effectué un mois avant le scrutin auprès de 200 personnes choisies de façon aléatoire, 95 personnes se déclarent favorables au candidat A.

La proportion d'électeurs favorables dans l'échantillon sondé est $p = \dfrac{95}{200} = 47,5\% < 50\%$ et le candidat A ne semble donc pas favoris...

1. On suppose que dans cette ville il y a en fait 54% de personnes favorables au candidat A.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes favorables au candidat A dans un échantillon de 200 personnes.
   Préciser la loi de probabilité de X.
2. Déterminer un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%. Que penser du résultat du sondage ?

Exercice 6 Dans une expérience de perception extra-sensorielle on demande à un sujet d'indiquer la couleur d'un jeton tiré aléatoirement dans un sac par un expérimentateur placé dans une autre pièce. Ni le sujet, ni l'expérimentateur ne connaissent la proportion de jetons de chaque couleur dans le sac.

On choisit la règle de décision suivante : si le pourcentage de couleurs devinées correctement appartient à l'intervalle de fluctuation autour de 50 % à un certain seuil fixé à l'avance, on considère que le sujet n'a pas de don de perception extra-sensorielle, sinon on considère qu'il a un don.

Un sujet fait le test, et identifie correctement la couleur de 32 jetons sur 50 essais.
Appliquer la règle de décision aux seuils de 95 %, puis de 99 %.