

Devoir de mathématiques

Exercice 1

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t est exprimé en minutes.

Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300°C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26°C par un système de ventilation.

La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre 10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont les suivantes :

- Sans couture.
- Très doux et confortables.
- Température maximale d'utilisation : 240°C .

1. Dans cette question, on ne demande pas de justification.
 - a) Quelle est, à la sortie du four, la température des plaques ?
 - b) Comment varie, à la sortie du four, la température des plaques au cours du temps ?
 - c) Vers quelle valeur la température des plaques devrait-elle se stabiliser ?
2. La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t , exprimé en minutes, par une fonction g . On admet que cette fonction g est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 274e^{at} + 26$ où a est un nombre réel.
 - a) Calculer $g(0)$. Ce résultat est-il conforme aux données ?
 - b) D'après la question 1, quel doit être le signe du nombre réel a ?
 - c) On sait que 3 minutes après sa sortie du four la température de la plaque, arrondie à l'unité, est de 262°C .
Montrer que la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient a est $-0,05$.
3. Dans cette question on considère que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$g(t) = 274e^{-0,05t} + 26.$$

- a) Avec les gants actuellement utilisés, à quelle température l'ouvrier pourra-t-il manipuler les plaques après leur sortie du four, en respectant les caractéristiques techniques de la commission de sécurité ?
- b) Si le directeur décidait d'équiper les ouvriers avec les nouveaux gants, quel délai d'attente minimal serait requis avant que les ouvriers puissent manipuler les plaques ?
- c) En déduire le gain de temps, en pourcentage, dû à l'utilisation de ces nouveaux gants.

Exercice 2

Partie A : Lecture graphique

On considère la courbe C associée à une fonction f représentée en annexe, ci-dessous, avec la droite T , tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1; 1,5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :
 - a) $f(x) \geq 1$
 - b) $f'(x) \geq 0$.

2. a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point de coordonnées $(0;1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2;7)$.
- b) En déduire le nombre dérivé $f'(0)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par la relation $f(x) = e^{-2x} + 5x$.

1. Déterminer, en la justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur \mathbb{R} .
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
4. a) Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
b) Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

Partie C

Déterminer une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-2x} + 2x - 1$.

ANNEXE

