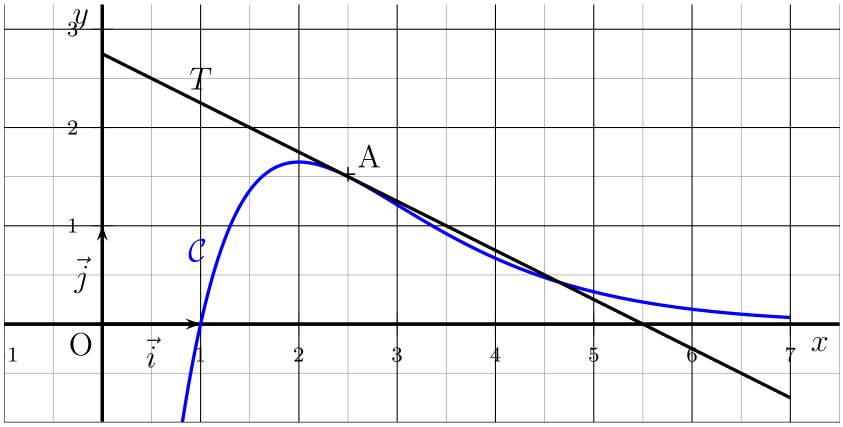
# Devoir de mathématiques

**Exercice** 1

1. Calculer les intégrales : $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(2x^2+3\right)\,dx$ ; $J = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{3}{2x+1}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_{0}^{1} e^{3x}\,dx$
2. Dresser le tableau de varation de la fonction $f$ définie par $f(x) = e^{3x} - x$.

**Exercice 2** **7 points**

Sur le graphique ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.




**Partie A - Étude graphique**

La droite $T$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point A(2,5 ;1,5) et d'ordonnée à l'origine 2,75.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$
2. $f'(2,5)$
3. Une équation de la tangente $T$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

**Partie B - Modélisation**

On admet qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$, $f(x) = (ax+b)e^{-x+2,5}$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $a$ et $b$.
2. Exprimer en fonction des réels $a$ et $b$ les nombres suivants :

$$f(1) \quad ; \quad f'(2,5).$$

3. Déduire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par $a$ et $b$.
4. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $x$.

**Partie C - Étude algébrique**

On admet que pour tout réel $x$, $f(x) = (x-1)e^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel $x$, $f(x) = e^{2,5}\left(\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$.

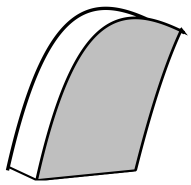
b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

   b) Étudier le signe de $f'$ et en déduire le tableau des variations de la fonction $f$ en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

**Partie D - Application**

On souhaite déterminer l'aire $S$ en unité d'aire de la surface d'une des faces principales du boîtier plastique de l'appareil auditif schématisé ci-contre.
Une modélisation mathématique a permis de représenter cette surface.



Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, cette surface correspond à la partie du plan limitée par :

- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2,5$ ;
- la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f$ étudiée précédemment ;
- la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction $g$ définie par : pour tout réel $x$, $g(x) = -2x^2 + 12x - 16$.

1. Sur l'annexe fournie, hachurer la surface décrite précédemment.
   Pour déterminer l'aire $S$ de cette surface, on décompose le calcul en deux parties.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_2^{2,5} g(x)\,dx$.
3. On souhaite calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_1^{2,5} f(x)\,dx$ où $f$ est la fonction dont une expression est donnée dans la partie C.

   a) Vérifier qu'une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par, pour tout réel $x$, $F(x) = -xe^{-x+2,5}$.

   b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale $J$.
4. a) Déterminer la valeur exacte de l'aire $S$ en unité d'aire,

   b) En déduire la valeur arrondie à $10^{-2}$ de l'aire $S$ en unité d'aire.

## ANNEXE 1

### À rendre avec la copie