Correction Bac STI2D & STL - Polynésie 14 juin 2017

Exercice 1 (4 points)

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ est :

A. $-2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$	**B.** $2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
C. $\mathrm{i}\sqrt{3} - 1$	**D.** $\sqrt{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Réponse B.

$$[z[= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ donc } z = 2\left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } z = 2e^{\imath\frac{2\pi}{3}}$$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\ln 2} e^{-x}\mathrm{d}x$ est égale à :

A. $\ln 2 - 1$	**B.** $\dfrac{1-e}{e}$
C. $\dfrac{2-e}{2e}$	**D.** $1 - \ln 2$

Réponse C.

$$\int_1^{\ln 2} e^{-x}\text{x} = \left[-e^{-x}\right]_1^{\ln 2} = -e^{-\ln 2} - \left(-e^{-1}\right) = -\frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{e} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{e} = \frac{2-e}{2e}$$

3. Si f est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - \ln x$, alors :

A. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$	**B.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
C. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$	**D.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2$

Réponse A.

$$\lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc par soustraction } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

4. Soit G la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $G(x) = x\ln x - x + 2$.
G est une primitive de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

A. $g(x) = x\ln x - 1$	**B.** $g(x) = \ln x + 2x$
A. $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + 2x$	**D.** $g(x) = \ln x$

Réponse D.

$$G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Exercice 2 (4 points)

Partie A

1. La fréquence de cas de diabète dans l'échantillon prélevé est $f = \dfrac{3}{85} \approx 0,035$.
2. D'après le texte, la proportion de personnes atteintes du diabète dans la population totale est $p = 0,08$.
   Pour un échantillon de taille $n = 85$: $85 \geqslant 30$, $np = 85 \times 0,08 = 6,8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 85 \times 0,92 = 78,2 \geqslant 5$ et l'intervalle de fluctuation avec un niveau de confiance de 95 % est :
   $$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
   $$= \left[0,08 - 1,96\sqrt{\frac{0,08(1-0,08)}{85}}\ ;\ 0,08 + 1,96\sqrt{\frac{0,08(1-0,08)}{85}}\right] \approx [0,022\ ;\ 0,138]$$
3. $f \approx 0,035 \in I$ donc on peut considérer que l'échantillon est représentatif de la population.

Partie B

1. La probabilité pour que le dossier prélevé soit celui d'une personne en hypoglycémie est :
   $P(N < 0,7) \approx 0,023$ (à la calculatrice).
2. La probabilité pour que le dossier prélevé soit celui d'une personne en hyperglycémie est :
   $P(N > 1,1) \approx 0,023$ (à la calculatrice).
3. Une personne est malade du diabète si elle est en hypoglycémie ou en hyperglycémie donc la probabilité que le dossier prélevé soit celui d'une personne souffrant de diabète est :
   $P(N < 0,7 \text{ ou } N > 1,1) = P(N < 0,7) + P(N > 1,1) \approx 0,046$.

Exercice 3 (6 points)

Partie A

1. L'équation différentielle $25y' + 3y = 0$ est équivalente à $y' + \dfrac{3}{25}y = 0$ ou encore $y' + 0,12y = 0$, qui est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a \neq 0$. D'après le cours, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = Ce^{-at}$ où C est un réel quelconque.
   L'équation différentielle $25y' + 3y = 0$ a donc pour solutions les fonctions f définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = Ce^{-0,12t}$ où C est un réel quelconque.
2. Si la solution vérifie la condition initiale $f(0) = 100$, on aura : $Ce^0 = 100 \iff C = 100$.
   La solution est donc la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 100e^{-0,12t}$.
3. La puissance du son 2 secondes après le pincement de la corde est $f(2) = 100e^{-0,12\times 2} \approx 79$ watts.

Partie B

1. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, on complète le tableau donné en annexe :

a	0	0	$1,25$	$1,25$	1,5625	1,71875
b	5	2,5	$2,5$	$1,875$	1,875	1,875
$b-a$	5	2,5	$1,25$	$0,625$	0,3125	0,15625
$\|b-a\| > 0,2$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	**Faux**
m	$2,5$	1,25	1,875	1,5625	1,71875	
$f(m) \approx$	$74,1$	$86,1$	$79,9$	$82,9$	$81,4$	
$f(m) > 80$	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	

2. Les valeurs affichées en sortie de cet algorithme sont alors 1,71875 pour a, et 1,875 pour b.
3. Cela signifie qu'à partir d'un temps t compris entre 1,71875 et 1,875 seconde, la puissance du son émis sera inférieure à 80 watts.

Partie C

1. On résout l'équation $f(t) = 80$:

   $f(t) = 80 \iff 100e^{-0,12t} = 80 \iff e^{-0,12t} = 0,8 \iff -0,12t = \ln(0,8) \iff t = -\dfrac{\ln(0,8)}{0,12}$

   donc $t \approx 1,860$.

   Cela signifie qu'au bout de $1,860$ seconde, la puissance du son émis est descendue à 80 watts.
2. On calcule la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$:

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,12t = -\infty \\ \text{On pose } T = -0,12t \\ \lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} e^{-0,12t} = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

   Cela veut dire que si le temps augmente, la puissance du son va tendre vers 0 watt.

Exercice 4 (6 points)

Partie A

1. Pour avoir la population à la fin de l'année 2017 on retire 15 % à l'effectif de 2016 ; retirer 15 %, c'est multiplier par $0,85$ donc $1240 \times 0,85 = 1054$.

   À la fin de l'année 2017, la population de renards sera de 1054.
2. (a) u_1 est la population en $2016 + 1 = 2017$ donc $u_1 = 1054$.

   $u_2 = 0,85 \times u_1 = 0,85 \times 1054 \approx 896$.

   (b) On retire 15 % chaque année donc on multiplie par $0,85$: $u_{n+1} = 0,85 \times u_n$

   (c) La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_0 = 1240$ et de raison $q = 0,85$.
3. La fin de l'année 2020 correspond à $n = 4$:

   $u_2 \approx 896$; $u_3 = 0,85 \times 896 \approx 762$ et $u_4 = 0,85 \times 762 \approx 648$

   On peut estimer à 648 la population de renards fin 2020.
4. La suite (u_n) est géométrique de raison $0,85$ et $-1 < 0,85 < 1$, donc la suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Cela signifie que la population des renards va s'éteindre.
5. Des scientifiques considèrent que l'espèce des renards présents dans le parc sera en situation d'extinction à partir du moment où le nombre de renards deviendra strictement inférieur à 100.

   La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1240$ et de raison $q = 0,85$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 1240 \times 0,85^n$.

   On résout l'inéquation $u_n < 100$:

$$u_n < 100 \iff 1240 \times 0,85^n < 100 \iff 0,85^n < \frac{100}{1240} \iff \ln\left(0,85^n\right) < \ln\frac{100}{1240}$$

$$\iff n \times \ln(0,85) < \ln\frac{100}{1240} \iff n > \frac{\ln\frac{100}{1240}}{\ln(0,85)}$$

Or $\dfrac{\ln\frac{100}{1240}}{\ln(0,85)} \approx 15,5$ donc le nombre de renards deviendra inférieur à 100 à la fin de la 16$^{\text{e}}$ année, soit fin 2032.

Partie B

1. $v_1 = 0,85v_0 + 30 = 0,85 \times 1240 + 30 = 1084$.
2. $v_n = 200 + 1040 \times 0,85^n$.

   - $0,85 < 1$ donc, pour tout n, $0,85 \times 0,85^n < 1 \times 0,85^n$, ce qui équivaut à $0,85^{n+1} < 0,85^n$.
     On en déduit que $1040 \times 0,85^{n+1} < 1040 \times 0,85^n$
     puis que $200 + 1040 \times 0,85^{n+1} < 200 + 1040 \times 0,85^n$, ce qui signifie que $v_{n+1} < v_n$.
     La suite (v_n) est donc décroissante, ce qui justifie que « le nombre de renards va diminuer ».
   - La suite $(0,85^n)$ est géométrique de raison $0,85$ donc elle a pour limite 0 ; la limite de la suite (v_n) est donc 200.
     Cela justifie que le nombre de renards va « se stabiliser vers 200 ».

   On peut donc affirmer que : « Le nombre de renards va diminuer et se stabiliser vers 200 ».