Limites de fonctions

Exemple 1 : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

Que se passe-t-il lorsque x se rapproche de -1 ? Comment se comporte $f(x)$?
Et lorsque x devient de plus en plus grand, c'est-à-dire se rappproche de $+\infty$ ou $-\infty$?

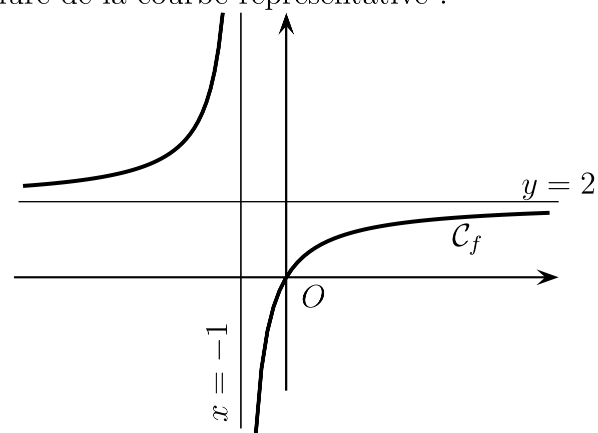
En $+\infty$ et $-\infty$: Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, positivement ou négativement, x et $x+1$ sont "très proches", et ainsi, $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ devient proche de $\dfrac{2x}{x}=2$.

On écrit alors, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

En -1 : lorsque x se rapproche de -1, $2x$ se rapproche de -2, et $x+1$ se rapproche de 0.
Si x se rapproche de -1, avec $x>-1$, alors $x+1>0$ et $\dfrac{2x}{x+1}$ se rapproche de $\dfrac{-2}{x+1}$ donc de $-\infty$.
Si x se rapproche de -1, avec $x<-1$, alors $x+1<0$ et $\dfrac{2x}{x+1}$ se rapproche de $+\infty$.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x)=+\infty$.

On peut alors compléter le tableau de variations, et tracer l'allure de la courbe représentative :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2



Les deux droites, horizontale d'équation $y=2$ et verticale d'équation $x=-1$, sont des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemple 2 : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par l'expression $f(x)=\dfrac{3}{x+3}+5$.
Tracer à l'aide d'une calculatrice la courbe représentative de f. Conjecturer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Exemple 3 : Même exercice que précédemment avec f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{10^{-4}}{x^2}$.

Exemple 4 : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\left(50+x^{10}\right)^2-2500}{x^{10}}$.

1. a) Tracer à l'aide d'une calculatrice la courbe de f dans une fenêtre avec $x_{min}=0$, $x_{max}=10$, $y_{min}=0$ et $y_{max}=1000$.
   Conjecturer alors la limite en 0 de f.

   b) Changer la taille de la fenêtre avec $x_{min}=0$, $x_{max}=0,1$, $y_{min}=0$ et $y_{max}=200$.
   Ce zoom permet-il de confirmer la conjecture précédente ?

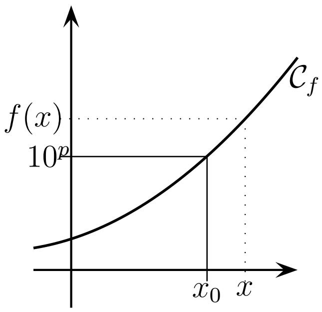
2. Développer $\left(50+x^{10}\right)^2$ et montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)=100+x^{10}$.
   En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

I - Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, on dit lorsque x tend vers $+\infty$, quatre cas peuvent se présenter :

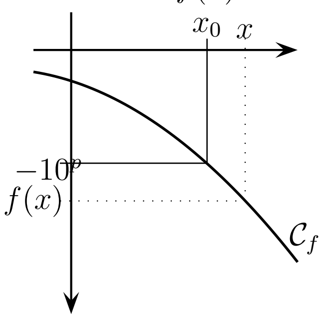
a) les nombres $f(x)$ deviennent eux aussi "infiniment grands" :



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout entier p, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$ alors $f(x) > 10^p$.

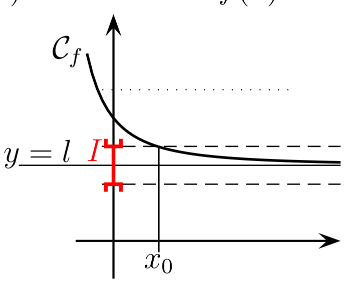
Propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,
et plus généralement, pour tout entier non nul p, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$

b) Les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement

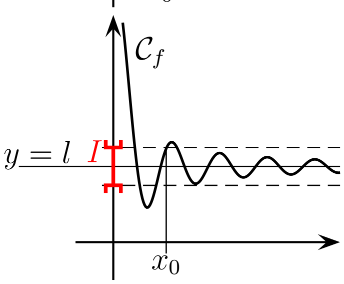


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Pour tout entier p, on peut avoir $f(x) < -10^p$, dès que on choisit x assez grand.

c) Les nombres $f(x)$ tendent, ou convergent, vers une valeur l :



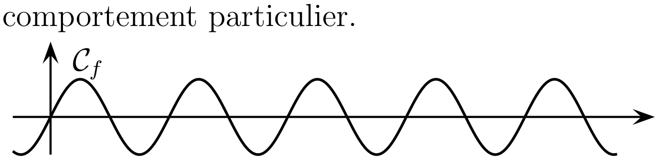
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
Pour tout entier p, toutes les valeurs $f(x)$ sont comprises dans l'intervalle $]l-10^{-p};l+10^p[$ dès que on chosisit x assez grand.



On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

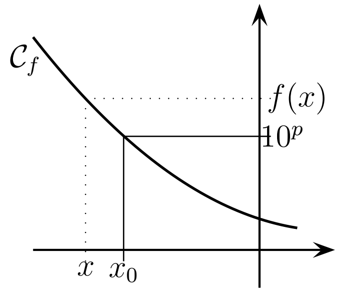
d) Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.

Par exemple, $f(x) = \sin x$



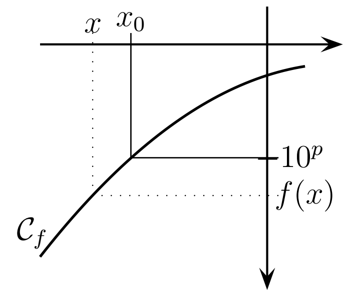
2) Limite en $-\infty$

De même que pour la limite en $+\infty$, quatre cas sont possibles :



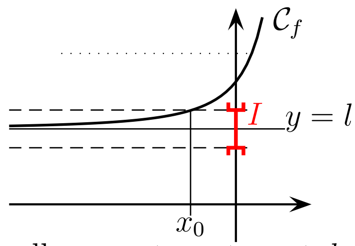
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Pour tout entier p, on a $f(x) > 10^p$, dès que on choisit x assez grand négativement.



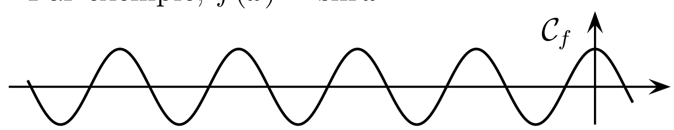
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Pour tout entier p, on a $f(x) < -10^p$, dès que on choisit x assez grand négativement.



Tout intervalle ouvert contenant l contient $f(x)$ pour x suffisament grand négativement.
On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.
Par exemple, $f(x) = \sin x$



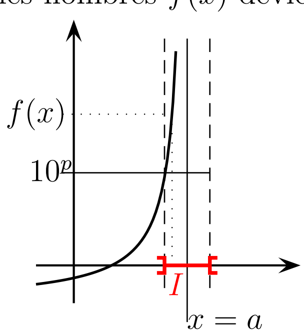
3) Limites en l'infini des fonctions de référence

$f(x)$	$\sqrt{x}$	x^2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\cos x$ $\sin x$
Limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0	0	×
Limite en $-\infty$	×	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	×	0	0	×

II - Limite en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, trois cas peuvent se présenter :

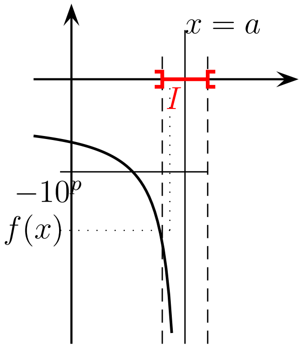
a) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand :



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Pour tout entier p, on a $f(x) > 10^p$, dès que on choisit x suffisament proche de a.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

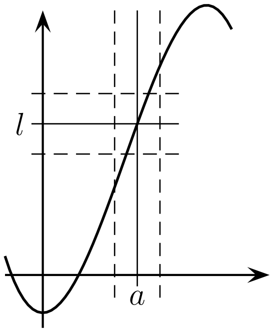
b) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement :



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
Pour tout entier p, on a $f(x) < -10^p$, dès que on choisit x suffisament proche de a.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

c) les nombres $f(x)$ se rapprochent de, ou tendent vers, le nombre l



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
$f(x)$ peut être aussi proche de l que voulu pourvu que x soit suffisament proche de a.

Si f est définie en a et que $f(a) = l$, on donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, et la fonction est <u>**continue en** a</u>.

Définition *Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, on dit que f est <u>continue</u> en a.*

III - Opérations sur les limites

Les résultats concernant les opérations sur les limites des suites sont applicables aux limites de fonctions.

1) Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	×

2) Limite d'un produit

Limite de f	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de fg	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	×

3) Limite d'un quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de g	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	×	×

4) Formes indeterminées

Les formes indéterminées nécessitent une étude particulière. Elles sont au nombre de quatre :

$$\text{"} +\infty - \infty \text{"} \qquad \text{"} 0 \times \infty \text{"} \qquad \text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"} \qquad \text{"} \frac{0}{0} \text{"}$$

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x^2-6$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-2x}{(x-3)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-3+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$

Exercice 2 Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-6$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par l'expression $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

1. Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ces résultats en terme d'asymptote.
2. Calculer l'expression de la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de f (en y incluant les résultats sur les limites).
4. Représenter graphiquement l'allure de la courbe représentative de f à l'aide des résultats précédents.

Exercice 4 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$

b) f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+x-3}{x(x-1)}$

Exercice 5 Étudier les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et interpréter graphiquement :

a) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ b) $f(x)=(4-x^2)(3x-2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $f(x)=4x-1+\dfrac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ d) $f(x)=\dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4

5) Composition de fonctions

Définition *Soit f et g deux fonctions.*
On appelle fonction composée de g par f la fonction $x\mapsto f(g(x))$.

Propriété *a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.*
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=c$.

Exemple : Soit $f(x)=\sqrt{3x^2+x+2}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2+x+2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.

Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+9-\dfrac{16}{x^2+4}}$

IV - Formes indéterminées

Les formes indéterminées sont les mêmes, et se traitent de la même manière, que pour les suites.

Exercice 7 Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-6x^4+3x^2-12\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x+3\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

V - Exercices

Exercice 8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=2x-3+\dfrac{9}{2x+1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$.
   b) Que peut-on dire du résultat précédent pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que, pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
   Compléter ce taleau de variation en y portant les limites obtenus au 1. et 2.
4. Déduire du tableau de variation le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
5. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=10$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $f(x)=x-1-\dfrac{2}{x-2}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, et Δ la droite d'équation $y=x-1$.

1. Déterminer les limtes de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Préciser les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}$.
2. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.
   b) Montrer que, pour tout x de $]2;+\infty[$, $f'(x)>0$.
   En déduire le tableau de variation de f.
   Compléter ce tableau avec les limites calculées précédemment. Tracer alors l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Soit $x\in]2;+\infty[$; on note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x, et N le point de Δ d'abscisse x.
   Placer les points M et N sur le graphique précédent.
   Déterminer la distance MN en fonction de x, puis la limite de cette distance lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.