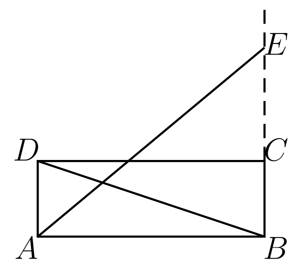
Géométrie et nombres complexes - Exercices *TSTI2D*

Exercice 1 On se place dans un RON. Dans chacun des cas, déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
En déduire alors $\cos(\vec{u},\vec{v})$ puis une valeur de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.
a) $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(1;3)$ b) $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(-1;3)$ c) $\vec{u}(2;-6)$ et $\vec{v}(9;3)$ d) $\vec{u}(2;0)$ et $\vec{v}(0;-7)$

Exercice 2 Dans un RON, on considère les points $A(-3;1)$, $B(4;-1)$ et $C(1;15)$.
Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

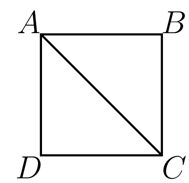
Exercice 3 Dans un RON, on considère les points $A(2;-1)$, $B(3;2)$ et $C(0;-2)$.

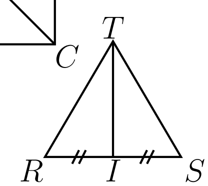
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.
3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
4. En déduire au degré près les angles du triangle ABC.



Exercice 4 On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB=3$ et $AD=1$. Déterminer le point E de la droite (BC) tel que les droites (AE) et (DB) soient perpendiculaires.

Exercice 5





1. $ABCD$ est un carré de côté 1.
   Calculer la longueur AC, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4}$.
2. RST est un triangle équilatéral de côté 1.
   Calculer la longueur TI, en déduire les valeurs exates de $\cos\dfrac{\pi}{6}$, $\sin\dfrac{\pi}{6}$, $\cos\dfrac{\pi}{3}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}$.

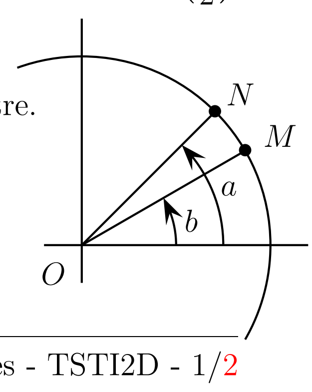
Exercice 6 Donner les valeurs exactes de :
a) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ d) $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e) $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 7 Simplifier les expressions :

a) $A=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(-x)+\cos(-x)$ b) $B=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\sin(x+\pi)$
c) $C=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin(\pi-x)$ d) $D=\cos(x+\pi)+\sin(\pi-x)+\cos(x+2\pi)$

Exercice 8 Résoudre les équations sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0;2\pi[$: a) $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\sin x=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
c) $\cos t=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ d) $\sin t=\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ e) $\cos x=0$ f) $\cos x=\dfrac{1}{2}$ g) $\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
h) $\cos x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ i) $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ j) $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ k) $\sin x=\cos x$ l) $\cos(2x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 9



1. Soit les points M et N du cercle trigonométrique donnés sur le graphique ci-contre.
   Donner les coordonnées des points M et N, puis des vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.
   En déduire une expression de $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.
   En utilisant une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$, donner une formule exprimant $\cos(a-b)$ à l'aide des cosinus et sinus de a et b.

2. Appliquer la formule précédente avec les nombres a et $-b$.
3. Appliquer la formule précédente avec les nombres $\dfrac{\pi}{2} - a$ et $-b$.
4. Appliquer la formule précédente avec les nombres a et $-b$.

Exercice 10 À l'aide des formules d'addition, montrer que : a) $2\cos\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{2}{3}x\right) + \sin\left(\dfrac{2}{3}x\right)$ b) $\sin\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$ c) $4\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin(2x) - 2\sqrt{2}\cos(2x)$

Exercice 11 En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :
a) $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ b) $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 12 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :
• $(2+3i)+(-1+6i)$ • $(5+i)-(3-2i)$ • $(1+i)(3-2i)$ • $(4+i)(-5+3i)$ • $(2-i)^2$
• i^3 • i^4 • i^5 • i^{2000} • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 13 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
$z_1 = 3$ $z_2 = -4$ $z_3 = 2i$ $z_4 = -1+i$ $z_5 = -\sqrt{3}+i$
$z_6 = -17$ $z_7 = -6\sqrt{3}+6i$ $z_8 = 5i$ $z_9 = 4-4i$ $z_{10} = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

Exercice 14 Écrire les nombres de l'exercice précédent sous forme exponentielle.

Exercice 15 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :
$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ $z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $z_4 = -3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $z_5 = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 16 On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.
1. Déterminer le module et un argument de z_1 eet z_2.
2. En déduire le module et un argument des nombres $\dfrac{1}{z_1}$, $z_1 \times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^2$, $(z_2)^3$.

Exercice 17 Écrire sous forme algébrique : a) $\dfrac{1}{2+3i}$ b) $\dfrac{3}{4-i}$ c) $\dfrac{3+i}{2-i}$ d) $\dfrac{1+i}{1-i}$ e) $\dfrac{1}{i}$ f) $\dfrac{3-i}{i}$

Exercice 18 **Vrai ou faux ?** Soit $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 + i$.
a) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ b) $z_1\overline{z_2} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 19 **QCM** Pour chaque question une seule des propositions est exacte. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
1. La forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{1}{2+i}$ est : a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}i$ b) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$ c) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$ d) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}i$
2. Le nombre complexe $z = -2 + 2i$ peut s'écrire : a) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ b) $2\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ c) $2\sqrt{2}e^{5i\frac{\pi}{4}}$ d) $4e^{3i\frac{\pi}{4}}$
3. Le nombre complexe conjugué de $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ est : a) $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $4e^{7i\frac{\pi}{6}}$ c) $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ d) $\dfrac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$
4. Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. On sait que $|z_A| = \sqrt{3}$ et $|z_B| = 3$. On sait aussi qu'un argument de z_A est égal à $\dfrac{\pi}{3}$ et qu'un argument de z_B est égal à $\dfrac{\pi}{4}$.

   L'écriture exponentielle du produit $z_A \times z_B$ est : a) $3e^{i\frac{7\pi}{12}}$ b) $3\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ c) $3\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{7}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$
5. Si $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, alors l'écriture exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   a) $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ b) $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ d) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$