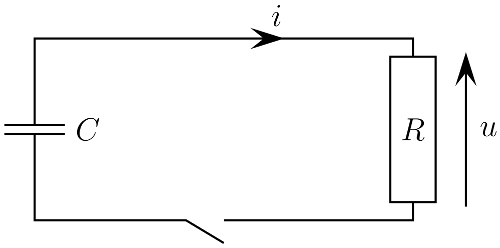
Equations différentielles

I - Introduction - Exemples de problème

Décharge d'un condensateur On considère le circuit RC suivant :



On a les relation $u(t) = Ri(t)$

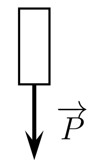
et $i(t) = -\dfrac{dq}{dt} = -q'(t)$ avec la charge $q(t) = Cu(t)$.

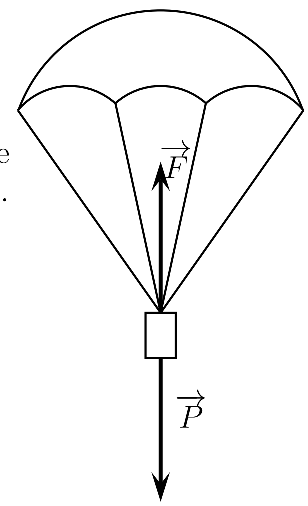
Ainsi, $u(t) = Ri(t) = R\Big(Cu(t)\Big)'$,

soit encore l'équation

$$(E):\ RCu'(t) + u(t) = 0$$

Parachute Dans le vide, la vitesse d'un objet de masse m soumis à son seul poids $P = mg$ vérifie l'équation (principal fondamental de la dunamique) : $mv'(t) = mg$, soit aussi $v'(t) = g$.

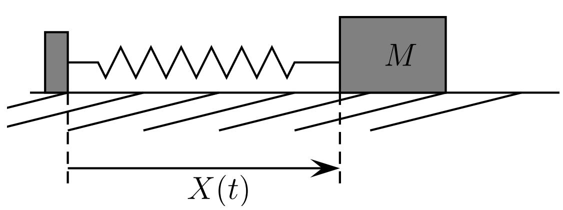




Si on considère maintenant les frottements de l'air sur l'objet, une force supplémentaire, proportionnelle à la vitesse de l'objet, s'oppose à son déplacement. La vitesse de l'objet est maintenant solution de l'équation

$$(E):\ mv'(t) + kv(t) = mg$$

Objet retenu par un ressort. On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.



On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.
On admet que la fonction X est solution de l'équation

$$(E) : X'' + 100X = 0$$

Toutes ces équations sont des **équations différentielles** : des équations dont l'inconnue est une fonction ($u(t)$, $v(t)$, $X(t)$), et qui utilisent ses dérivées ($u'(t)$, $v'(t)$, $X''(t)$).

II - Équation différentielle $y' + ay = b$

1) Équation homogène $y' + ay = 0$

On a : $y' + ay = 0 \iff y' = -ay$. Or on sait que pour la fonction $y(x) = ke^{-ax}$, k constante réelle, de la forme $y = ke^u$, on a justement $y' = ku'e^u = -ake^{-ax} = -ay$.

Ainsi, cette fonction exponentielle est une solution. On peut démontrer par ailleurs que c'est la seule solution.

Propriété *Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto ke^{-ax}$, où k est une constante réelle quelconque.*

Exercice 1 Résoudre les équations homogènes :
a) $y' + y = 0$ b) $y' - 3y = 0$ c) $y' = 2y$ d) $3y' = y$ e) $y' = \dfrac{y}{5}$

2) Équation générale $y' + ay = b$

Par exemple, $y' + 2y = 6$. Une solution particulière et évidente est la fonction constante $y = 3$ (pour laquelle, $y' = 0$, et donc $y' + 2y = 0 + 2 \times 3 = 6$).

Plus généralement, la fonction constante $y = \dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$.

En ajoutant alors la solution de l'équation homogène on obtient l'ensemble des solutions :

Propriété *Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto ke^{-ax} + \dfrac{b}{a}$, où k est une constante réelle quelconque.*

Exercice 2 Donner les solutions des équations différentielles :
a) $y' + 2y = 0$ b) $y' + 2y = 6$ c) $y' - 3y = 9$ d) $y' + 2y = 5$ e) $2y' + 3y = -7$ f) $y' = -\dfrac{y}{4} + 2$

3) Équation avec une condition initiale

Résoudre l'équation $y' + 3y = 12$. Déterminer la fonction solution qui vérifie de plus $y(0) = 1$.

Propriété *L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x_0) = y_0$.*

Exercice 3 Soit (E) l'équation différentielle $2y' + y = 2$.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$.
Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(\ln 4) = 1$.

III - Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

On a $y'' + \omega^2 y = 0 \iff y'' = -\omega^2 y$.

Pour $\omega = 1$ donc l'équation $y'' = -y$, les fonctions trigonométriques conviennent. En effet cos vérifie $\cos' = -\sin$ et donc $\cos'' = (\cos')' = (-\sin)' = -\cos$ et de même, sin vérifie $\sin' = \cos$ et donc $\sin'' = \cos' = -\sin$.

Pour l'équation plus générale, avec ω quelconque, on modifie un peu : soit $f(x) = \cos(\omega x)$, sous la forme $f = \cos(u)$ avec $u(x) = \omega x$ donc $u'(x) = \omega$, alors $f' = -u' \sin(u)$ soit $f'(x) = -\omega \sin(\omega x)$.

On recommence pour otenir la dérivée seconde f''. $f' = k \sin(u)$ avec la constante $k = -\omega$ et $u(x) = \omega x$ donc $u'(x) = \omega$, alors $(f')' = f'' = ku' \cos(u)$ soit $f''(x) = -\omega^2 \cos(\omega x) = -\omega^2 f$.

Ainsi, $f(x) = \cos(\omega x)$ est une solution de l'équation différentielle.

De même, en reprenant la même démarche, $g(x) = \sin(\omega x)$ est aussi une solution.

On admet alors que ceux sont les seules solutions :

Propriété *Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k_1 \cos(\omega) + k_2 \sin(\omega x)$, où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles quelconques.*

- *L'équation différentielle admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus **deux** conditions initiales données.*
- *Les solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $x \mapsto A\sin(\omega x + \varphi)$, où A et φ sont des constantes réelles, φ étant le déphasage.*

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles :
a) $y'' + 16y = 0$ b) $9y'' + y = 0$ c) $4y'' + 25y = 0$ d) $y'' + 5y = 0$ e) $2y'' = -5y$

Exercice 6 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = \dfrac{1}{10}$ et $f'(0) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

Exercice 7 On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$.

1. Résoudre (E).
2. On sait de plus que la courbe représentative de la fonction g solution de (E) :
   - passe par le point $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   - a une tangente en A parallèle à l'axe des abscisses.

   Déterminer g et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 8 Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$, puis déterminer sa solution f qui vérifie les conditions $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$.

Exercice 9 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + \dfrac{1}{9}y = 0$ où y est une fonction de la variable réelle t.

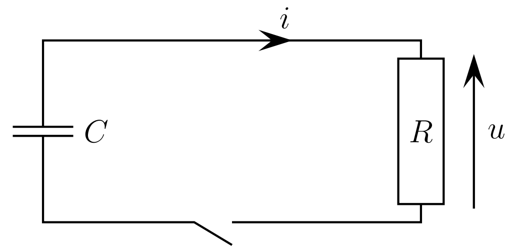
1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{3}$.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel t, $f(t) = 2\sin\left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

IV - Exercices

Exercice 10 On considère l'équation (E) : $y' - 2y = 0$. On note f la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et g la solution de (E) vérifiant $g(0) = 2$.

1. Déterminer les expressions de f et g.
2. Donner les tableau de variations de f et g, puis tracer dans un repère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ représentatives de f et g.
3. Sur le graphique, tracer la droite Δ d'équation $y = 2$.
   On note A et B les points d'intersection de Δ avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
   a) Déterminer les coordonnées des points A et B.
   b) Tracer sur le graphique les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en A et B.
   Déterminer les coefficients directeurs de ces deux tangentes.

Exercice 11



Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R.
La tension u est une fonction du temps t, en secondes, et vérifie l'équation différentielle $(E) : RCu'(t) + u(t) = 0$.

On prend $C = 15.10^{-5}$ farads et $R = 2.10^4$ ohms.

1. Écrire l'équation différentielle (E) vérifée par la tension u et la résoudre.
2. Déterminer la fonction u solution de (E) et telle que $u(t_0) = u_0$.
3. À partir de quel instant t_1 la tension devient-elle inférieure au dixième de sa valeur initiale ?
   On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de seconde de t_1.
4. Calculer la valeur moyenne de u entre les instants t_0 et t_1.
5. L'energie emmagasinée dans le condensateur à l'instant t est, en joules, $W(t) = \frac{1}{2}C\left[u(t)\right]^2$.
   Calculer la valeur moyenne W_m de cette fonction entre t_0 et t_1.

Exercice 12

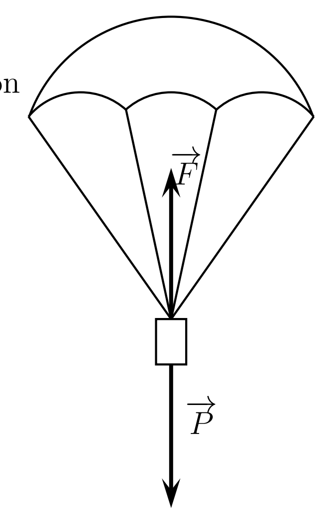
A. **Résolution de l'équation différentielle**
On considère l'équation $(E) : y' + 0,01y = 24$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. Déterminer la solution v de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

B. **Étude d'une fonction**
Soit v la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = 2400\left(1 - e^{-0,01t}\right)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.
2. Déterminer la fonction dérivée v' de v.
   En déduire le sens de variation de v
3. Résoudre l'équation $v(t) = 1200$. Donner la valeur exacte puis approchée arrondie à 10^{-1}.

Exercice 13



La vitesse d'un objet soumis à son poids et aux frottements de l'air vérifie l'équation

$$(E) : \; v'(t) + 140v(t) = 10$$

où la fonction vitesse v, exprimée en $m.s^{-1}$, est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution v de (E) qui s'annulle pour $t = 0$.
3. Étudier la limite de v lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
4. À quel instant t_1 la bille atteint-elle 95% de sa vitesse limite ?
   À quel instant t_2 en atteint-elle 99% ?

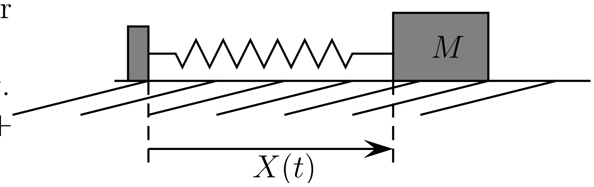
Exercice 14

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.
2. Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = 2$.

3. On rappelle que, pour tout réel a et b, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
   Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Exercice 15

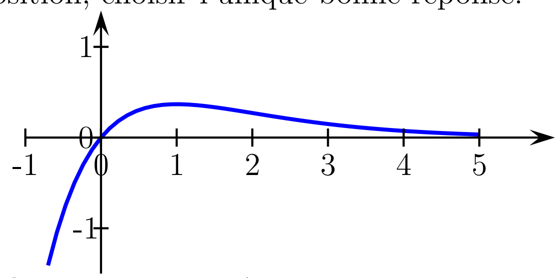


On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.
On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.
On admet que la fonction X est solution de l'équation (E) : $X'' + 100X = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière X de (E) telle que $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 1$.
3. Vérifier que, pour tout réel t, $X(t) = 10^{-1}\sqrt{2}\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Vérifier que l'énergie mécanique W du système, définie pour tout nombre réel $t \geqslant \in [0; +\infty[$ par $W(t) = 10^{-1}\left[X'(t)\right]^2 + 10\left[X(t)\right]^2$, est constante.
5. Déterminer la valeur moyenne de la fonction X sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{10}\right[$.

Exercice 16

Cet exercice est un QCM. Pour chaque proposition, choisir l'unique bonne réponse.



A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-contre :

1. Pour tout réel x, $f'(x) =$ est égal à :
   a) $-e^{-x}$ b) e^{-x} c) $(1-x)e^{-x}$
2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
   a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$
3. Une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   a) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$ b) $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ c) $F(x) = -xe^{-x}$
4. La valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ est :
   a) négative b) inférieure à 1 c) supérieure à 3

B. 1. Dans ce qui suit, C est une constante quelconque.
   L'équation différentielle (E) : $2y' + y = 1$ a pour ensemble de solutions :
   a) $x \mapsto Ce^{-2x} - 1$ b) $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1$ c) $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} - 1$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}\cos\dfrac{1}{3}x + \sin\dfrac{1}{3}x$.
   f est une solution de l'équation différentielle (E) :
   a) $9y" + y = 0$ b) $y" + \dfrac{1}{3}y = 0$ c) $y" + 9y = 0$