# Suites numériques

**<u>Introduction :</u> Intérêts simples et composés.**
*cf. activité tableur,* https://xymaths.fr/Lycee/TSTG/Cours-TSTMG/Cours-Exercices-Tableur.php

On dispose d'un capital de 1 000 euros que l'on peut placer de deux façons différentes :
- *à intérêts simples* au taux annuel de 10%. Cela signifie que, chaque année, on percevra le même intérêt $I$ égal à 10% du capital de départ.
- *à intérêts composés* au taux annuel de 4%. Cela signifie que, chaque année, le capital acquis augmente de 4% par rapport au capital de l'année précédente.

On note $s_n$ le capital acquis au bout de $n$ années avec un taux d'intérêts simples, et $c_n$ le capital acquis au bout de $n$ années avec un taux d'intérêts composés.

Par exemple, $s_0 = c_0 = 1000$ est le capital initial, $s_1$ et $c_1$ sont les capitaux à la fin de la première année, $s_2$ et $c_2$ à la fin de la deuxième année ...

1. Calculer $s_1$, $s_2$, $s_3$ et $c_1$, $c_2$, $c_3$.
2. Calculer $s_{20}$ et $c_{20}$.
3. Déterminer, au bout de 50 ans, lequel des deux placements est le plus avantageux.
4. Au bout de combien d'années, le capital acquis atteindra-t-il 10 000 euros avec chacun de ces deux placements.

## I - Définition

**Définition** *Une* **suite numérique** *est une liste de nombres réels, que l'on peut numéroter avec les nombres entiers naturels (0, 1, 2, 3, ...).*

<u>Ex :</u> Dans l'exercice précédent du calcul du capital avec intérêts simples, on calcule le capital $s_n$ acquis la $n$-ième année ; on numérote donc ici les années à partir de l'année du placement initial.

On note alors $s_1$ le capital acquis au bout de 1 an, $s_2$ au bout de 2 ans, $s_3$ ...

**Définition Notations**
*Une suite numérique se note généralement $(u_n)$, ou $(v_n)$ ou $(s_n)$ ou $(c_n)$ ou ... l'indice $n$ représentant un nombre entier naturel.*
*Le nombre $u_n$ est le terme de rang $n$ de la suite $(u_n)$ (le $n$-ième terme).*

**Exercice** 1 Le chiffre d'affaire d'une société augmente de 50 000 euros chaque année.

En 2010, le chiffre d'affaire était de 300 000 euros. On désigne par $u_n$ le chiffre d'affaire de la société l'année $2010 + n$. Ainsi, on a en 2010, $u_0 = 300\,000$.

1. Déterminer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Exprimer le chiffre d'affaire $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
3. Calculer le chiffre d'affaire pour 2020.
4. Quel est le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaire de 2010 à 2011 ? et de 2011 à 2012 ?
5. Déterminer le taux d'augmentation du chiffre d'affaire en 10 ans, entre 2010 et 2020.
   Quel est le taux d'augmentation moyen annuel ?

**Exercice** 2 Une entreprise prévoit d'augmenter sa production chaque mois de 10 %. Elle produit jusqu'à maintenant 2 000 pièces par mois.
On désigne par $u_n$ le nombre de pièces fabriquées dans $n$ mois. Ainsi, par exemple, $u_0 = 2\,000$.

Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$, puis $u_{10}$.

# II - Suites arithmétiques

**Définition** *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité $r$, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
*Pour tout entier $n$, $u_{n+1} = u_n + r$.*

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \dots$$

Exemple :

- La suite de nombres : 0 ;1 ;2 ;3 ;. . .est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1
- La suite 1 ;3 ;5 ;7 ;. . .est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2

**Propriété** *Pour une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$, on a $u_n = u_0 + nr$.*
*Si le premier terme est $u_1$, on a $u_n = u_1 + (n-1)r$.*

**Exercice 3** On considère la suite arithmétique $(u_n)$ de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Écrire l'expression du terme général $u_n$, puis calculer $u_3$ et $u_{30}$.

**Exercice 4** On considère la suite arithmétique $(u_n)$ de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 12$.
Écrire l'expression du terme général $u_n$, puis calculer $u_5$ et $u_{20}$.

**Exercice 5** On utilise un tableur pour calculer les termes successifs d'une suite arithmétique de raison 12 et de premier terme 124.
Quelle formule faut-il saisir dans la cellule $B1$ pour obtenir, par recopie vers le bas, les termes de la suite dans la colonne $B$.

| A | B |
|---|---|
| 0 | 124 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| ... | |

**Exercice 6** Soit la suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$. Calculer $u_{2002}$.

**Exercice 7** Soit la suite arithmétique $(u_n)$ de premiers termes $u_0 = 12$ et $u_1 = 13,5$. Calculer $u_{26}$

**Exercice 8** Soit la suite arithmétique $(v_n)$ de premier terme $v_1 = 1200$ et de raison $r = 10$.
Donner l'expression de $u_n$ puis calculer $v_{25}$.

**Exercice 9** Soit la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12200$ et de raison $r = -200$.
Donner l'expression de $u_n$ puis calculer $u_{30}$.

**Exercice 10** La population d'une ville était de 40 000 habitants en 2010. Elle diminue depuis de 800 habitants chaque année.
On note$p_0$ la population de la ville en 2008, et $p_n$ la population $n$ années plus tard, c'est-à-dire en $2008 + n$.
Montrer que la suite $(p_n)$ est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.
Calculer le nombre d'habitants dans cette ville en 2020 puis 2030.

**Exercice 11** On place 1000 euros à intérêts simples au taux annuel de 4%.

1. Calculer le capital acquis à la fin de la première année, puis de la deuxième année.
2. On note $c_n$ la capital acquis à la fin de la n-ième année.
   Quelle est la nature de la suite $(c_n)$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Calculer le capital acquis au bout de 10 ans.

# III - Suites géométriques

**Définition** *Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité $q$ , appelée* **raison** *de la suite, le terme précédent.*
*Pour tout entier $n$, $u_{n+1} = q \times u_n$*

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \dots$$

<u>Exemple :</u>

- La suite de nombres : 1 ;2 ;4 ;8 ;16 ;. . .est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2
- La suite 1 ;3 ;9 ;27 ;81 ;. . .est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3

**Propriété** *Pour une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$, on a $u_n = u_0 q^n$.*
*Si le premier terme est $u_1$, on a $u_n = u_1 q^{n-1}$.*

**Exercice** 12 Soit la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1,2$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Donner l'expression de $u_n$.
3. Calculer $u_{30}$.

**Exercice** 13 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux.

1. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ?
2. On note $e_n$ l'épaisseur après $n$ pliages. Montrer que $(e_n)$ est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
3. En calculant les valeurs successives de $u_n$, déterminer au bout de combien de pliages, l'épaisseur dépasse la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

**Exercice** 14 **QCM**

1. $(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$.
   a. $u_0 = -2$ et $r = 3$, alors $u_4$ est égal à ☐ 7 ☐ 12 ☐ 10
   b. $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$, alors $r$ est égal à ☐ 7 ☐ $-3$ ☐ $-7$
   c. $u_3 = 2$ et $u_4 = 5$, alors $u_5$ est égal à ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
2. $(u_n)$ est une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$.
   a. $u_0 = 3$ et $q = 4$, alors $u_3$ est égal à ☐ 12 ☐ 48 ☐ 192
   b. $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$, alors $q$ est égal à ☐ 10 ☐ $0,4$ ☐ $2,5$
   c. $u_3 = 2$ et $u_4 = 6$, alors $u_5$ est égal à ☐ 12 ☐ 18 ☐ 36
3. Dans un placement à intérêts composés au taux annuel de 2 %, les capitaux disponibles au bout d'un an, de 2 ans, de 3 ans, . . ., de $n$ ans, sont les termes d'une suite géométrique de raison :
   ☐ 2 ☐ $0,02$ ☐ $1,02$

4. On place un capital de 10 000 euros à 4 % par an avec intérêts composés. Au bout de deux ans, le capital est acquis est de :
   ☐ 10 800 euros ☐ 10 816 euros ☐ 10 400 euros
5. La production d'une entreprise augmente de 5 % chaque année. Au bout de 5 ans, elle aura augmenté d'environ
   ☐ 25 % ☐ 27% ☐ 28 %
6. Un équipement informatique perd 20 % de sa valeur chaque année. Au bout de 5 ans, il aura perdu
   ☐ 100 % de sa valeur ☐ environ 33% de sa valeur ☐ environ 67 % de sa valeur

**Exercice** 15 Un véhicule, acheté en 2012 au prix de 23 250 euros, se déprécie chaque année. Compte tenu du nombre de kilomètres parcourus chaque année, le véhicule perd chaque année 20 % de sa valeur. Cette perte annuelle est calculée sur la valeur résiduelle de l'anné précédente.

Pour tout entier $n$, on note $u_n$ la valeur résiduelle du véhciule l'année $2012 + n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique , dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Calculer la valeur résiduelle du véhicule en 2013, 2014 et 2022.

**Exercice** 16 **Remboursement d'un emprunt par annuité constante**

On rembourse un emprunt d'un montant $D$ au moyen d'annuités égales.

Soit $i$ le taux de l'emprunt et $n$ le nombre d'années de remboursement, alors l'annuité constante $a$ est donnée par la formule : $a = D\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

1. Déterminer le montant de l'annuité constante pour un emprunt $D = 350\,000$ euros effectué sur 15 ans au taux de 4 %.
2. Quel est le prix total payé au bout de 15 ans.

**Exercice** 17 Le nombre d'élèves d'un lycée était de 1 000 à la rentrée 2009 et de 1 070 à la rentrée 2010.

1. Déterminer le taux d'évolution, sous forme de pourcentage, du nombre d'élèves entre la rentrée 2009 et la rentrée 2010.
2. On suppose que ce pourcentage d'augmentation reste constant. On note $E_n$ le nombre d'élève à la rentrée $2009 + n$.
   a) La suite $(E_n)$ est-elle arithmétique ou géométrique ? Préciser son premier terme et sa raison.
   b) Déterminer le nombre d'élèves en 2014.

**Exercice** 18 Un artisan désire acquérir en 2014 une machine qui vaut 19 000 euros. Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2010, il a placé pour cela la somme de 16 000 euros, à intérêts composés, au taux annuel de 3,75 %. On note $u_n$ le capital, exprimé en euros, disponible au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2010 + n$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$ (arrondir à l'unité).
2. Disposera-t-il d'une somme suffisante en 2014 ?
3. Déterminer la somme qu'il devrait placer en 2010 pour disposer du capital nécessaire en 2014.