Probabilités: loi normale

I - Loi binomiale

Propriété *On répète n fois successivement, de manière identique et indépendante, une expérience aléatoire qui a deux issues possibles : un succès de probabilité p et un échec de probabilité $q = 1 - p$.*
La variable aléatoire X égale au nombre de succès sur les n répétitions suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.
L'espérance est de plus : $E(X) = np$.

Les probabilités peuvent se calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur (tableur par exemple).

Exercice 1

1. Je lance un dé correctement équilibré 2 fois consécutivement, et je m'intéresse aux 6 obtenus.
   À l'aide d'un arbre de probabilité, compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité :

Evénement	Obtenir 0 six	Obtenir 1 six	Obtenir 2 six
Probabilité			

2. Je lance cette fois le dé 3 fois successivement. Compléter de même la loi de probabilité :

Evénement : Obtenir k "face"	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Probabilité				

3. Je lance maintenant 60 fois ce dé.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir 10 fois six.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir moins de 5 fois six.

Exercice 2 Parmi toutes les maisons assurées dans une compagnie d'assurance, 20% ont subi un sinistre l'année dernière.

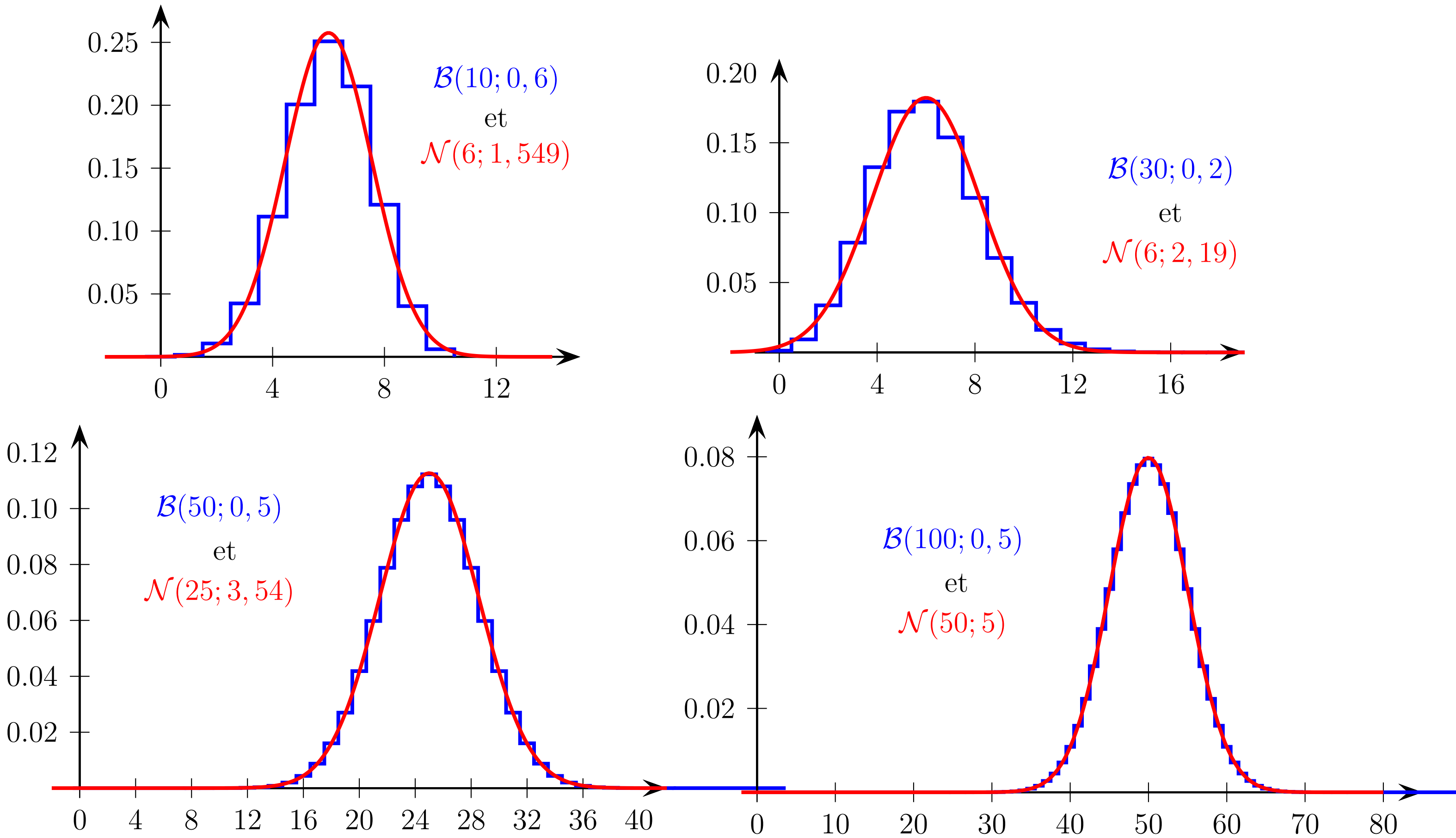
1. Je prends au hasard deux dossiers de clients. Quelle est la probabilité que les maisons assurées de ces deux dossiers aient subi un sinistre ?
2. Je prends au hasard 20 dossiers.
   Quelle est la probabilité que 5 maisons assurées parmi ces dossiers aient subi un sinistre ?
   Quelle est la probabilité que moins de 5 maisons aient subi un sinistre ?

II - Loi normale

1) Approximation de la loi binomiale

Théorème *Pour n suffisamment grand, on peut remplacer les probabilités associées à la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par celles de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.*

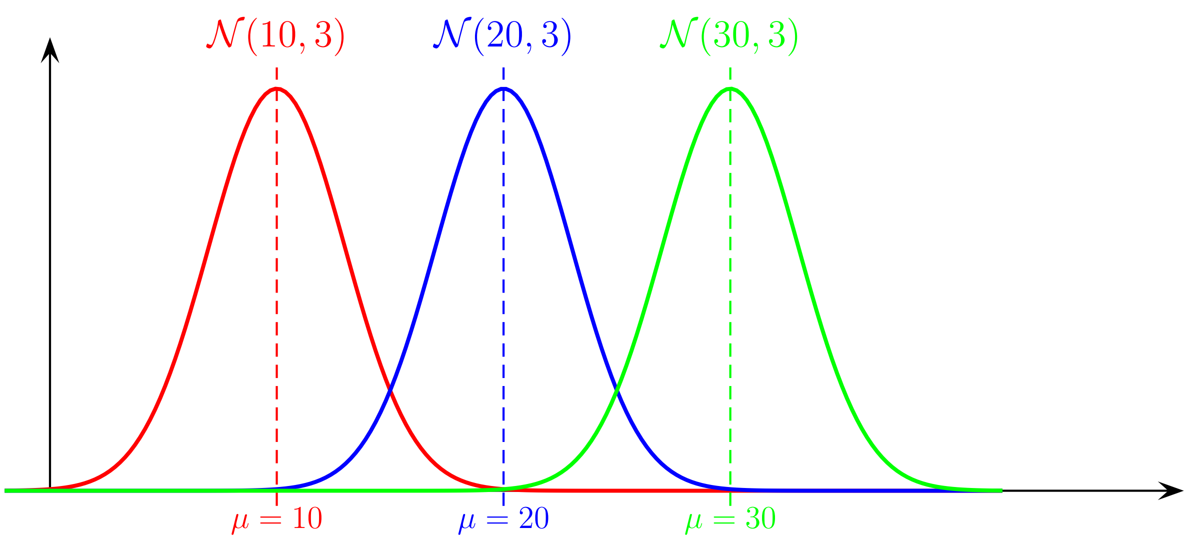
En pratique, on approche les probabilités de la loi binomiale par celles de la loi normale lorsque



Voir aussi : https://xymaths.fr/Informatique-Programmation/Calcul/Loi-binomiale.php

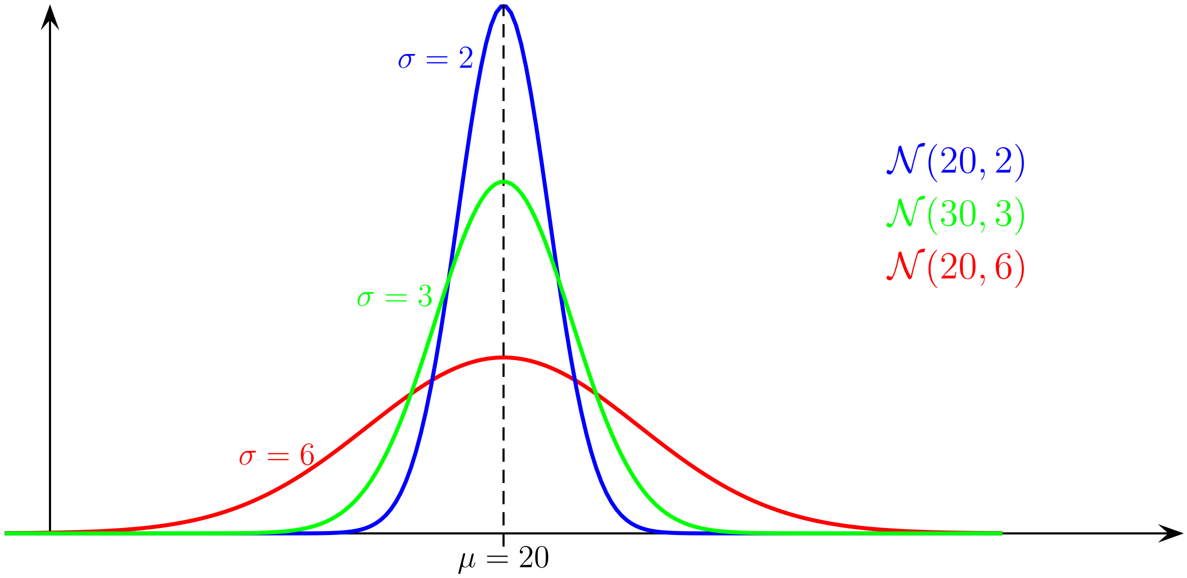
2) Loi normale

La loi normale a deux paramètre :
— son espérance, ou moyenne, μ



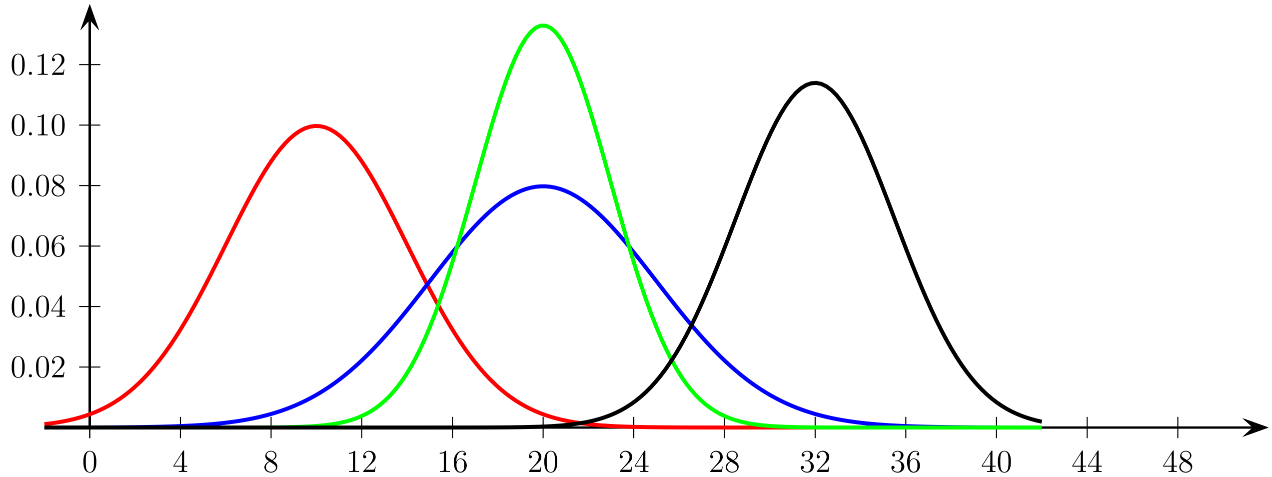
La courbe est "centrée en μ" : plus précisément, la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

— son écart type σ

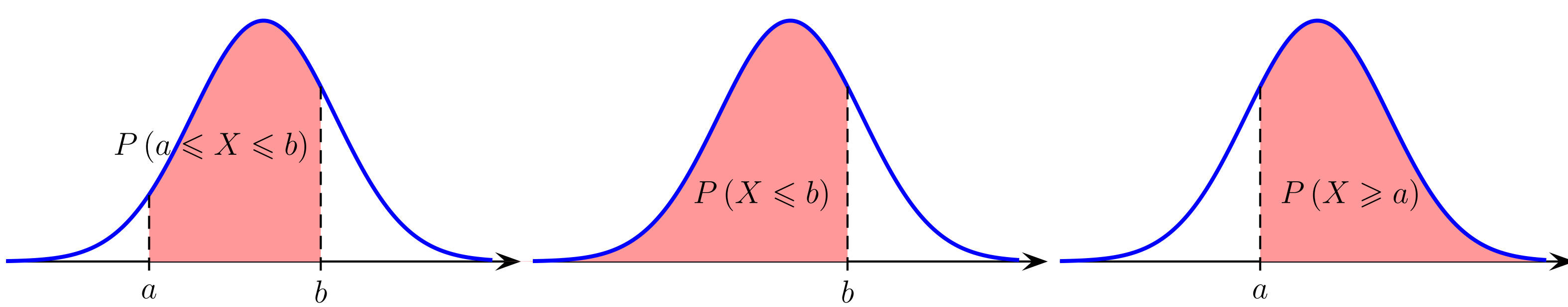


Le calcul de probabilité avec la loi normale, comme pour la loi binomiale, peut se faire avec une calculatrice ou un ordinateur.

Exercice 3 Identifier sur le graphique suivant les courbes des lois $\mathcal{N}(20; 5)$, $\mathcal{N}(10; 4)$, $\mathcal{N}(32; 2,5)$ et $\mathcal{N}(20; 3)$.



La probabilité associée à la loi normale normale est l'aire sous la courbe :

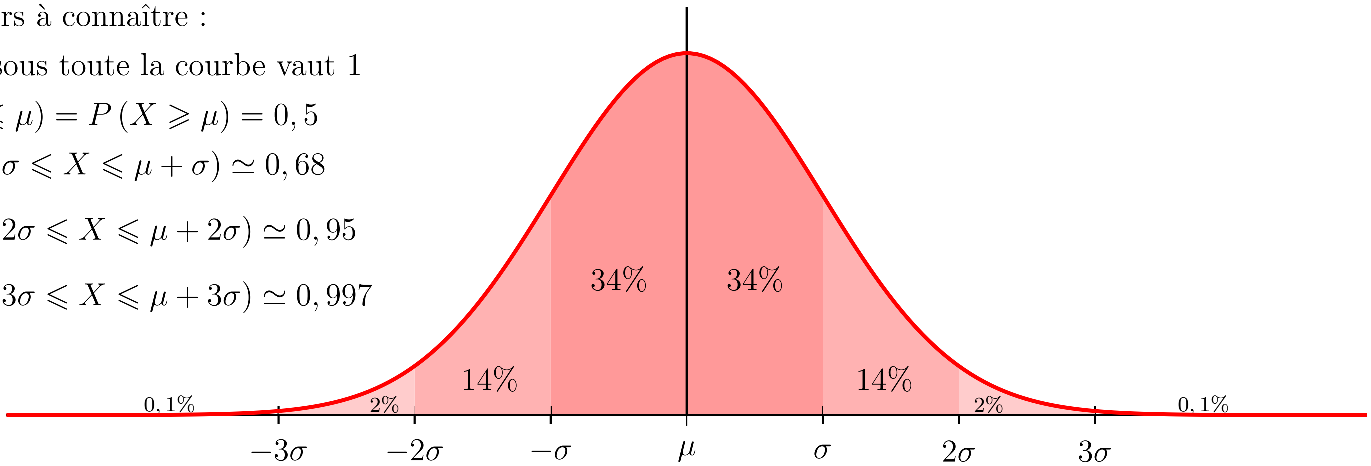


Exercice 4 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(10; 2)$. Représenter graphiquement et donner les probabilités :

a) $P(X \leqslant 10)$ b) $P(X \geqslant 10)$ c) $P(X \leqslant 6)$ d) $P(8 \leqslant X \leqslant 12)$ e) $P(6 \leqslant X \leqslant 14)$

Des valeurs à connaître :

- L'aire sous toute la courbe vaut 1
- $P\left(X \leqslant \mu\right) = P\left(X \geqslant \mu\right) = 0,5$
- $P\left(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma\right) \simeq 0,68$
- $P\left(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\right) \simeq 0,95$
- $P\left(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma\right) \simeq 0,997$



Exercice 5 On considère la loi $\mathcal{N}(20;2)$. Sans calculatrice (mais vérifier avec...), donner les probabilités

a) $P\left(X \leqslant 20\right)$ b) $P\left(18 \leqslant X \leqslant 22\right)$ c) $P\left(16 \leqslant X \leqslant 24\right)$ d) $P\left(X \leqslant 16\right)$ e) $P\left(X \geqslant 24\right)$

Exercice 6 Une variable aléatoire sur la loi normale $\mathcal{N}(6;3)$. On donne de plus $P(X \leqslant 3) = 0,1587$ et $P(X \leqslant 4) = 0,2525$.

Donner sans calculatrice (mais vérifier après avec...) les probabilités $P(X \geqslant 3)$ et $P(3 \leqslant X \leqslant 4)$.

Exercice 7 Un modèle d'écran tactile, conçu et produit par une certaine marque, a une durée de vie annoncée de 4 ans.

En fait la durée de vie de ces écrans peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 4 ans et d'écart type 1 an.

J'ai un téléphone sur lequel se trouve un écran de ce modèle.

a) Déterminer la probabilité pour qu'il ne tombe pas en panne avant 4 ans.

b) Déterminer la probabilité qu'il tombe en panne moins de 2 ans après l'avoir acheté.

c) Déterminer la probabilité qu'il tombe en panne moins de 1 an après l'avoir acheté.

d) Déterminer la probabilité qu'il fonctionne correctement pendant au moins 8 ans.

Exercice 8 Une entreprise produit des cylindres de diamètre 32 mm.

Des mesures effectuées montrent que le diamètre de ces cylindres correspond à une variable aléatorie Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(32;0,4)$.

Dans la chaîne de production et de montage, les cylindres dont le diamètre est inférieur à 30,5 mm et ceux dont le diamètre est supérieur à 33 mm sont inutilisables par la suite, et doivent donc être mis au rebut.

a) Calculer la probabilité pour qu'un cylindre ne soit pas mis au rebut.

b) L'entreprise produit 10 000 cylindres par jour. Quel nombre en jette-t'elle chaque jour ?

Exercice 9 Une entreprise commercialise des batteries miniatures dont l'autonomie correspond à une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 12$ heures et d'écart type $\sigma = 2$ heures.

Calculer la probabilité qu'une batterie, prise au hasard, ait une autonomie :

a) inférieure ou égale à 8 heures b) inférieure ou égale à 16 heures

c) supérieure ou égale à 8 heures d) comprise entre 8 heures et 16 heures

Exercice 10 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(30;2)$.

Donner la probabilité $P(26 \leqslant X \leqslant 34)$.

Propriété *L'intervalle $\left[\,\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma\,\right]$ est l'intervalle de fluctuation à 95% de la variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma\right)$:*
dans 95% des cas, la variable aléatoire prend une valeur dans cet intervalle.