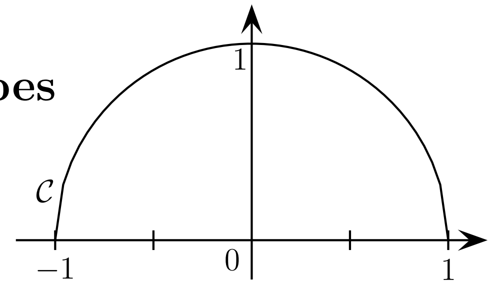
Fonctions - Dérivée et étude

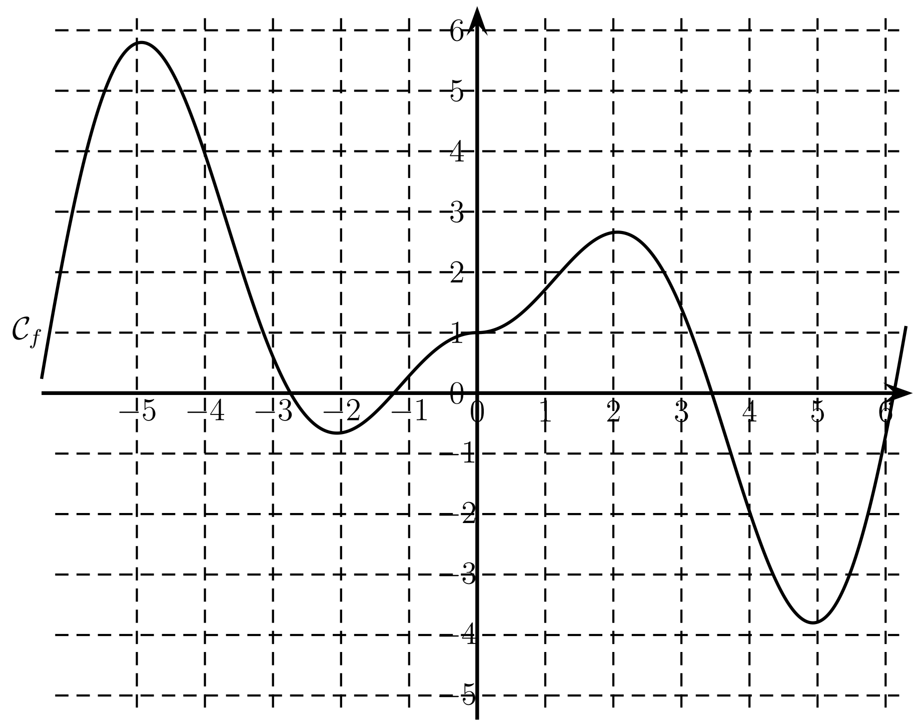
I - Rappels : tangentes, droites et courbes



Exercice 1 On considère le demi-cercle $\mathcal{C}$ ci-contre.
Tracer les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse $-0,5$, 0 et $0,5$.

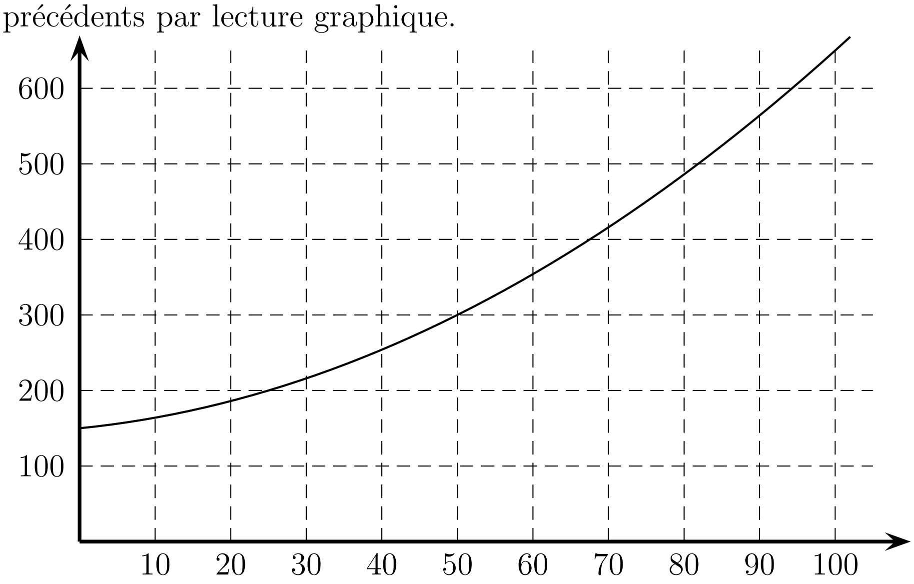
Exercice 2
La courbe $\mathcal{C}_f$, représentative d'une fonction f, est donnée ci-dessous.

Construire les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses -5 ; -4 ; -1 ; 0 ; 2, 4 et 5.



Exercice 3 Un apiculteur produit du miel. Le coût de production hebdomadaire de x kilogramme de miel est donné, en euros, par l'expression $C(x) = 0,04x^2 + x + 150$.

1. Quel est le montant des coûts fixes ?
2. Calculer le coût de production pour 40 kg de miel, puis celui pour 60 kg.
3. Calculer $C(61) - C(60)$. Que représente cette valeur ?
4. La courbe représentative de la fonction C est donnée ci-dessous.
   Retrouver les coûts précédents par lecture graphique.



5. On note A le point de la courbe d'abscisse 61 et B celui d'abscisse 60.
   Placer les points A, B et la droite (AB).
   Tracer la tangente à la courbe au point A. Que remarque-t'on ?

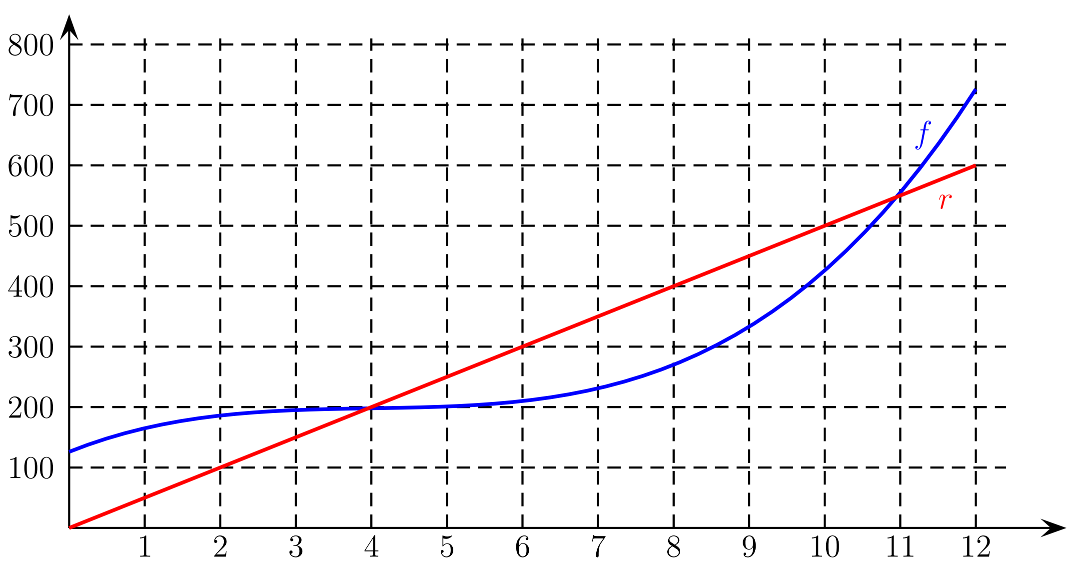
Exercice 4 Tracer dans un repère les droites D_1 d'équation $y = 2x - 1$ et D_2 d'équation $y = -x + 2$.

Exercice 5 La société INFOLOG a mis au point un nouveau logiciel de gestion destiné aux PME. Cette société a mené une enquête auprès de 300 entreprises afin de déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir un exemplaire de ce nouveau logiciel. L'enquête a donné les résultats suivants :

Prix proposé x_i (en centaines d'euros)	30	25	20	15	10
nombre d'entreprises y_i disposées à acheter le logiciel à ce prix	90	120	170	200	260

1. Représenter graphiquement le nuage de points de la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal
2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite D d'ajustement affine de y en x sous la forme $y = ax + b$. Arrondir les résultats au besoin au dixième.
   Tracer D sur le graphique précédent.
3. On prendra pour la suite la droite d'équation $y = -8,4x + 336$ comme droite d'ajustement.
   En utilisant cet ajustement, préciser pour quel prix de vente la société INFOLOG peut espérer que les 300 entreprises contactées acceptent d'acquérir ce logiciel.
4. On note $R(x)$ la recette, exprimée en centaines d'euros, dégagée par la vente de y logiciels au prix de x centaines d'euros.
   a) En utilisant la relation entre y et x donnée par l'ajustement affine donner l'expression de $R(x)$ pour x variant entre 5 et 30.
   b) Étudier les variations de la fonction R sur $[5; 30]$ et tracer l'allure de la courbe de R.
      En déduire le prix de vente du logiciel, exprimé en euros, pour que la recette $R(x)$ soit maximale.
      Déterminer alors le montant de cette recette ainsi que le nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.

Exercice 6 Chaque jour, une entreprise fabrique x centaines de cartons d'emballage, x compris entre 0 et 12.
Le coût total de la fabrication journalière de ces cartons, en euros, est exprimé par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 126$.
La recette journalière totale, en euros, pour x centaines de cartons vendues est donnée par la fonction r.
On donne ci-après un tracé des courbes représentatives de f et r.



1. Déterminer le montant des charges fixes.
2. Quel est le prix de vente de 100 cartons ?
3. Exprimer $r(x)$ en fonction de x.
4. Établir à partir du graphique le tableau de variation de la fonction f.
5. déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir le nombre de cartons que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice.
6. On suppose que tout carton fabriqué est vendu, et on note $b(x)$ le bénéfice journalier.
   a) Exprimer $b(x)$ en fonction de x.
   b) Tracer la courbe du bénéfice b, par exemple à l'aide de la calculatrice, et dresser son tableau de variation.
   c) En déduire le nombre de cartons à fabriquer chaque jour pour réaliser le bénéfice maximal.

II - Calcul de la fonction dérivée

On calcule la fonction dérivée d'une fonction quelconque à partir des deux tableaux suivants :

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée
$f(x)=k$ (constante)	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
ku, ($k$constante)	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 7 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x)=3$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=x^7$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

e) $f(x)=4x^2$ f) $f(x)=5x^3$ g) $f(x)=-3x^2$ h) $f(x)=7x$

i) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$ j) $f(x)=2x^3+x$ k) $f(x)=-4x^3+2x+3$ l) $f(x)=-x+3$

m) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ n) $f(x)=\dfrac{x+2}{8+x}$ o) $f(x)=(3x+2)x^2$ p) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$

q) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x}$ r) $f(x)=-x^3+4x$ s) $f(x)=\dfrac{-x^3+4x}{x}$ t) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}$

Exercice 8 Une entreprise fabrique chaque semaine x hectolitres d'un certain produit. Le coût de fabrication, en euros, de ces x hectolitres de produit est donné par $C(x)=x^3-90x^2+2700x$, pour $x\geqslant 0$.

On suppose que toute la production est vendue au prix de 900 euros l'hectolitre.

La recette hebdomadaire est alors, en euros, donnée par $R(x)=900x$.

1. Exprimer en fonction de x le bénéfice hebdomadaire $B(x)$.

2. a) On appelle coût marginal du x-ième hectolitre le coût de ce x-ième hectolitre, seul, produit.
   Quele est le coût marginal du 10ème hectolitre ? du 20ème ?

   On utilise généralement l'expression de la dérivée $C'(x)$ pour exprimer le coût marginal.

   Donner l'expression de $C'(x)$, puis calculer $C'(10)$ et $C'(20)$. Comparer avec les couûts marginaux calculés précédemment.

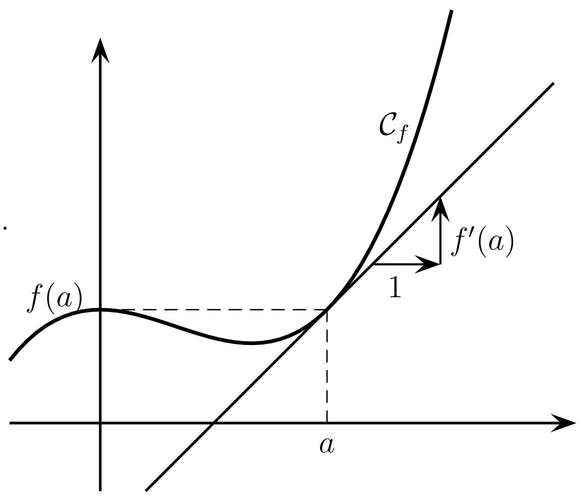
   b) De même, la recette marginale du x-ième hectolitre est la recette apportée par le x-ième hectolitre, seul.

   On utilise là aussi généralement l'expression de la dérivée $R'(x)$ pour exprimer la recette marginale.

   Donner l'expression de $R'(x)$ puis calculer les recettes marginales pour 10 hectolitres, puis 20 hectolitres.

3. On admet qu'il est renatble pour une entreprise d'augmenter sa production tant que $C'(x) < R'(x)$ et $B(x) > 0$.
   Analyser la rentabilité d'une augmentation de la production de l'entreprise pour les valeurs x suivantes : $x = 20$; $x = 35$, $x = 40$; $x = 55$; $x = 70$.

III - Équation de la tangente



Au point d'abscisse a, la tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$.

L'équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercice 9 Soit $f(x) = 3x^2+5$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a = 1$.

Exercice 10 Soit $f(x)! = \dfrac{1}{2x}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a=1$.

Exercice 11 Soit $f(x)! = 5x + \dfrac{4}{x}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a=2$.

Exercice 12 Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a=2$.

IV - Sens de variation

Le sens de variation d'une fonction est donné par le signe de sa dérivée :

Propriété *Si, sur un intervalle I,*

- $f'(x) \geqslant 0$, *alors f est croissante*
- $f'(x) \leqslant 0$, *alors f est décroissante*

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $[-0,5;9]$ par $f(x) = \dfrac{-3x}{x+1}$.

Étudier le sens de variation de f. Préciser ses éventuels extremums.

Exercice 14 Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[-6;5]$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$.

Exercice 15 Étudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=-3x^3+2$ sur $[-2;3]$

b) $f(x)=-x^3+2,25x^2+3x+1$ sur $[-1;3]$

c) $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$ sur $[-1;2]$

d) $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-2}$ sur $]2;+\infty[$

e) $f(x)=4x-\dfrac{16}{x}$ sur $[0,5;10]$

f) $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x}$ sur $]0;+\infty[$

g) $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$ sur $[1;4]$

V - Exercices

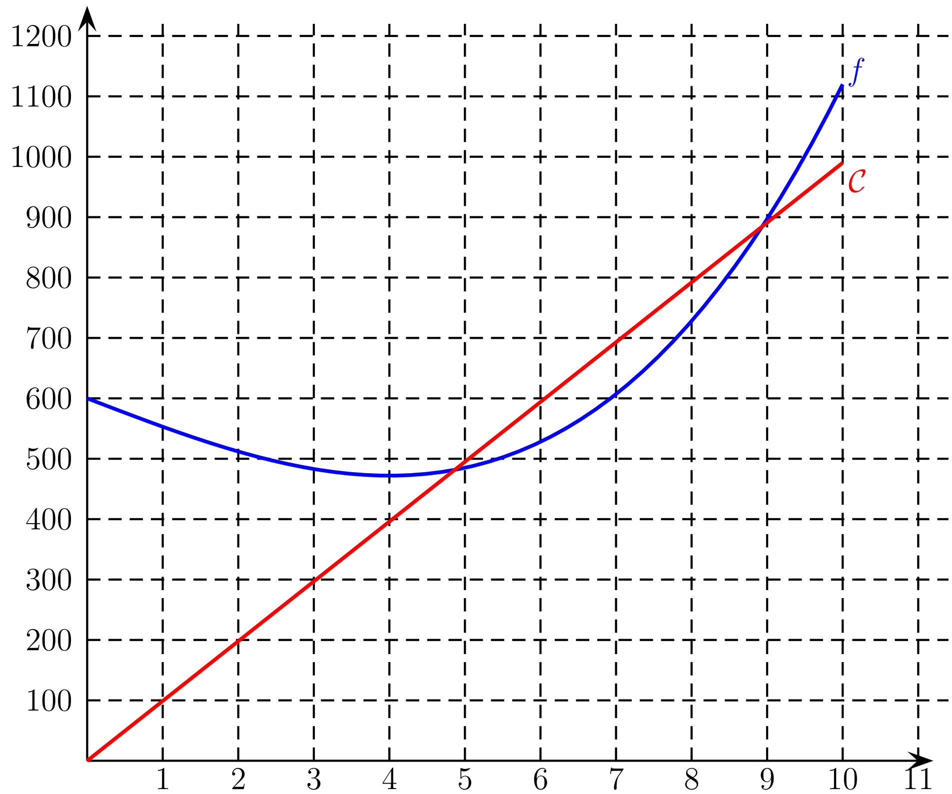
Exercice 16 **(BAC)** Un artisan fabrique et vend des objets en bois. Pour chaque mois, il estime que le coût de production de x objets est donné, en euros, par : $C(x)=x^2+60x+121$, pour $1\leqslant x\leqslant 30$.

1. Calculer le coût de production de 10 objets, puis de 30 objets.
   Donner alors le coût moyen de production de 10 objets, puis de 30 objets.
2. Plus généralement, le coût moyen de production est donné par $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.
   a) Montrer que $f(x)=x+60+\dfrac{121}{x}$.
   b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2-121}{x^2}$. Dresser alors le tableau de variation de f.
   c) Quel est le coût moyen minimum ? pour combien d'objets produits ?
3. L'artisan vend chaque objet 110 euros.
   a) Expliquer pourquoi le bénéfice mensuel réalisé par la fabrication et la vente de x objets est égal à : $B(x)=-x^2+50x-121$.
   b) Dresser le tableau de signes de $B(x)$. Combien d'objets faut-il fabriquer au minimum pour être rentable ?
   c) Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
   En déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour que ce bénéfice soit maximal. Donner ce bénéfice maximal.

Exercice 17 **Vrai-Faux**

Un tracé de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x)=x^3-48x+600$ est donné ci-dessous.

La droite D d'équation $y = 99x$ est aussi représentée.



Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. On peut conjecturer que f est strictement croissante sur $[0; 10]$.
2. $f(0) = 600$
3. $f(7) = 600$
4. $f'(x) = 3(x-4)(x+4)$
5. Pour tout x de $[4; 10]$, $f'(x) \geqslant 0$
6. f a un minimum en $x = 4$
7. Pour tout x de $[0; 10]$, $f(x) \geqslant 472$
8. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 a un coefficent directeur positif
9. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 6 est $y = 60x + 168$
10. Pour tout x de $[4; 9]$, $f(x) \leqslant 99x$.

Exercice 18 Le ministère de la santé charge une agence de publicité de faire une campagne de promotion pour un nouveau remède. Une étude prouve que la fréquence $f(t)$ de personnes connaissant le nom de ce remède après t semaines de publicité est donnée par $f(t) = \dfrac{3t}{3t+2}$, où $t \geqslant 0$.

Partie A.

1. Calculer $f(2)$.
2. En déduire le pourcentage de personnes qui ignorent le nom de ce remède au bout de deux semaines.
3. Comment peut-on interpréter la valeur de $f(0)$?

Partie B.

1. Calculer $f'(t)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 18]$;
2. a) Tracer l'allure courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

c) Ajouter au graphique précédent la droite T.

d) Ajouter au graphique précédent les droites D d'équation $y = 0,90$ et D' d'équation $y = 0,95$.

Partie C.

1. Déterminer graphiquement :
   a) le nombre de semaines de campagne nécessaires pour que 90% de la population connaisse le nom du remède ;
   b) combien de semaines sont nécessaires pour passer de 90% à 95%
2. le ministère a décidé d'arrêter la campagne au bout de six semaines. Justifier ce choix.