Corrigé

Exercice 1

1. On calcule les produits matriciels AB et BA :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   qui montrent que B est bien l'inverse de A, soit $B = A^{-1}$.

2. Le système s'écrit qous forme matricielle :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. D'après l'énoncé on sait que
   - $A(-2;0) \in \mathcal{C} \iff f(-2) = (-2a+b)e^{-2c} = 0 \iff -2a+b = 0$ car $e^{-2c} \neq 0$;
   - $B(0;1) \in \mathcal{C} \iff f(0) = b = 1$, donc aussi, d'après le résultat précédent, $-2a+b=0 \iff a = \dfrac{1}{2}$.

     On a donc jusqu'ici, $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{cx}$.
   - la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale, donc son coefficient directeur est nul, soit $f'(-1) = 0$.
     f est de la forme $f = v \times v$, avec $u(x) = \dfrac{1}{2}x+1$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{2}$, et $v(x) = e^{cx}$ donc $v'(x) = ce^{cx}$.

     On a alors la dérivée : $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{cx} + c\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{cx} = \dfrac{1}{2}e^{cx}(cx+1+2c)$.

     Ainsi, $f'(-1) = 0 \iff \dfrac{1}{2}e^{-c}(-c+1+2c) = 0 \iff -c+1+2c = 0$ car $e^{-c} \neq 0$, et donc $c = -1$.

   En résumé, la fonction f a pour expression $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{-x}$.

2. Graphiquement, il semblerait que l'axe des abscisses soit une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   On a $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-x} + e^{-x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}} + e^{-x}$.

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x}} = 0$.

   Comme on sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, on a bien $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ce qui montre bien que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire aussi l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$.

3. On cherche les abscisses x telles que $f(x) = x+2 \iff \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)e^{-x} = 2\left(\dfrac{1}{2}x+1\right) \iff \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)(e^{-x}-2)$ 0.

   On a donc deux solutions : $\dfrac{1}{2}x+1 = 0 \iff x = -2$ ou $e^{-x} - 2 = 0 \iff x = -\ln(2)$.

   Il y a donc deux points d'intersection, les points $D(-2; f(-2))$, soit $D(-2;0)$, et $E(-\ln(2); f(-\ln(2)))$, soit $E(-2; 2-\ln(2))$.