Corrigé

Exercice 1 *Il s'agit d'une équation diophantienne : une équation à coefficients entiers et dont on recherche les solutions entières.*
On a $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$. Ainsi, $\text{pgcd}(12; 18) = 2 \times 3 = 6$.
On peut donc diviser tous les termes de l'équation par 6 :

$$12u + 18v = 24 \iff 2u + 3v = 4$$

2 et 3 sont premiers entre eux, et on peut écrire l'égalité de Bezout : $2 \times (-1) + 3 \times (1) = 1$, soit aussi en multipliant par 4, $2 \times (-4) + 3 \times (4) = 4$.
Ainsi, le couple $(u_0 = -4; v_0 = 4)$ est une solution particulière.
On a alors

$$\left\{\begin{array}{llll} 2 \times u & + & 3 \times v & = 4 \\ 2 \times (-4) & + & 3 \times (4) & = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow 2u + 3v = 2 \times (-4) + 3 \times (4) \Longrightarrow 2(u + 4) = 3(4 - v)$$

donc, 2 divise le produit $3(4 - v)$. Or 2 et 3 sont premiers entre eux, et donc, d'après le théorème de Gauss, 2 divise $4 - v$, ce qui est équivalent à dire qu'il existe un entier k tel que $4 - v = 2k \iff v = 4 - 2k$.
On a alors aussi, $2(u + 4) = 3(4 - v) = 3 \times 2k \iff u = -4 + 3k$.

Réciproquement, si $u = -4 + 3k$ et $v = 4 - 2k$, pour un entier k quelconque, alors $2u + 3v = 2(-4 + 3k) + 3(4 - 2k) = 4$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation diophantienne $12u + 18v = 24$ est $\mathcal{S} = \Big\{(u = -4 + 3k; v = 4 - 2k) \ ; \ k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé on sait que
   - $A(-2; 0) \in \mathcal{C} \iff f(-2) = (-2a + b)e^{-2c} = 0 \iff -2a + b = 0$ car $e^{-2c} \neq 0$;
   - $B(0; 1) \in \mathcal{C} \iff f(0) = b = 1$, donc aussi, d'après le résultat précédent, $-2a + b = 0 \iff a = \dfrac{1}{2}$.

     On a donc jusqu'ici, $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{cx}$.
   - la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale, donc son coefficient directeur est nul, soit $f'(-1) = 0$.
     f est de la forme $f = v \times v$, avec $u(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{2}$, et $v(x) = e^{cx}$ donc $v'(x) = ce^{cx}$.
     On a alors la dérivée : $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{cx} + c\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{cx} = \dfrac{1}{2}e^{cx}\,(cx + 1 + 2c)$.
     Ainsi, $f'(-1) = 0 \iff \dfrac{1}{2}e^{-c}\,(-c + 1 + 2c) = 0 \iff -c + 1 + 2c = 0$ car $e^{-c} \neq 0$, et donc $c = -1$.

   En résumé, la fonction f a pour expression $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{-x}$.
2. Graphiquement, il semblerait que l'axe des abscisses soit une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   On a $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-x} + e^{-x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} + e^{-x}$.

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

   Comme on sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, on a bien $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ce qui montre bien que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire aussi l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$.
3. On cherche les abscisses x telles que $f(x) = x+2 \iff \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{-x} = 2\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) \iff \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)(e^{-x} - 2)$ 0.
   On a donc deux solutions : $\dfrac{1}{2}x + 1 = 0 \iff x = -2$ ou $e^{-x} - 2 = 0 \iff x = -\ln(2)$.
   Il y a donc deux points d'intersection, les points $D(-2; f(-2))$, soit $D\,(-2; 0)$, et $E\,(-\ln(2); f(-\ln(2))$, soit $E\,(-2; 2 - \ln(2))$.