Corrigé

Exercice 1 ***Rappel - Opérations sur les congruences :***
Si $a \equiv b[d]$ *et* $a' \equiv b'[d]$ *alors* $a + a' \equiv b + b'[d]$ *et* $a^n \equiv b^n[d]$

Seuls quatre cas sont à envisager, et on peut donc efficacement raisonner par une disjonction de cas :

$a[4]$	0	1	2	3
$a^2[4]$	0	1	0	1
$a^2 + a + 1[4]$	0+0+1=1[4]	1+1+1=3[4]	2+0+1=3[4]	3+1+1=1[4]

Ainsi, le nombre $a^2 + a + 1$ n'est jamais divisible par 4.

Exercice 2

1. F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.
   En d'autres termes, on a $F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$.
   En particulier, comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, ce qui montre que F est strictement croissante.
2. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $t > 0 \iff e^t > e^0 = 1$, et donc, en divisant par $t > 0$, $\dfrac{e^t}{t} > \dfrac{1}{t}$.
   Comme l'intégrale conserve l'ordre, pour $x > 1$, on a alors $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt > \int_1^x \frac{1}{t}dt$.
   Or $G(t) = \ln(t)$ est la primitive qui s'annule en 1 de $g(t) = \dfrac{1}{t}$, et donc $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = G(x) = \ln(x)$.
   On a ainsi $\varphi(x) = F(x) - \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - \int_1^x \frac{1}{t}dt > 0$
3. Pour $x > 1$, on a donc $\varphi(x) = F(x) - \ln(x) > 0 \iff F(x) > \ln(x)$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, et donc d'après le corollaire du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.