Corrigé

Exercice 1

1. $F(x) = \dfrac{1}{n}e^{nx}$ est une primitive de $f(x) = e^{nx}$, et ainsi
$$J_n = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{n}e^n - \frac{1}{n}e^0 = \frac{1}{n}\left(e^n - 1\right)$$
2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$, avec $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
On reconnaît une expression à intégrer de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^x$.
Ainsi, $G(x) = \ln\left(1+e^x\right)$ est une primitive de g, et on a donc,
$$I_1 = G(1) - G(0) = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$
3. Pour tout entier n, on a, par linéarité de l'intégrale,
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx - \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} - \frac{e^{nx}}{1+e^x}\right)dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x} - e^{nx}}{1+e^x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nx}\left(e^x - 1\right)}{1+e^x}dx \end{aligned}$$
Or, pour tout $x \in [0;1]$, $e^{nx} > 0$, et $e^x \geqslant e^0 = 1$, car la fonction exponentielle est croissante, d'où $e^x - 1 \geqslant 0$, et $e^x + 1 \geqslant 2 > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x} \geqslant 0$, et donc, par positivité de l'intégrale,
$$I_{n+1} - I_n = \frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}dx \geqslant 0$$
ce qui montre que la suite (I_n) est croissante.
4. La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a
$$x \in [0;1] \iff 0 \leqslant x \leqslant 1 \iff e^0 = 1 \leqslant e^x \leqslant e^1 = e \iff 2 \leqslant 1 + e^x \leqslant 1 + e \leqslant 4$$
car $e \simeq 2,7 < 3$.
Ainsi, en prenant l'inverse (et en inversant donc l'ordre), on a bien, pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{1+e^x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
5. Comme l'intégrale conserve l'ordre, on déduit de l'encadrement précédent que
$$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{4}dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}dx$$
soit donc $\dfrac{1}{4}J_n \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2}J_n$, et, grçace à la première question :
$$\frac{1}{4n}\left(e^n - 1\right) \leqslant I_n \leqslant \frac{12}{2n}\left(e^n - 1\right)$$
Comme, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n}\left(e^n - 1\right) = +\infty$, et ainsi, d'après le corollaire du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 2 On a $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\arg(z) = \theta$ avec $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $\arg(z) = \theta = \dfrac{\pi}{3}$, et, sous forme exponentielle, $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
On a alors, $z^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2^6 e^{6i\frac{\pi}{3}} = 64e^{2i} = 64$