Corrigé

Exercice 1

1. F est un produit de deux fonctions : $F = uv$, avec $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^{-x} = e^{w(x)}$, donc $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x}$.
   On a alors, $F' = u'v + uv'$, soit $F'(x) = 1 \times e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) = (1-x)e^{-x} = f(x)$.
   Ainsi, F est bien une primitive de f.
   L'ensemble des primitives de f est donc l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme $F + k$, où k est un réel quelconque.
2. Une fonction f est une densité de loi de probabilité sur l'intervalle $[a;b]$ si
   - f est définie sur $[a;b]$;
   - f est positive, c'est-à-dire que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant 0$.
   - $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 1$.

   Ici,
   - f est définie sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0;1]$;
   - Pour tout $x \in [0;1]$, on a $e^{-x} > 0$, et $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 1-x \leqslant 1$, et ainsi, $f(x) = (1-x)e^{-x} \geqslant 0$ sur $[0;1]$;
   - Comme F est une primitive de f,

   $$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 1e^{-1} - 0e^{-0} \neq 1$$

   Ainsi, la fonction f n'est pas une densité de loi de probabilité sur $[0;1]$.

Exercice 2

a) $x_M + y_M + z_M - 3 = 2 - 3 + 1 - 3 = -3 \neq 0$ donc $M \notin P$.

b) $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal de P, la droite D passant par M et orthogonale à P admet donc comme représentatation paramétrique : $\left\{\begin{array}{ll} x & = 2+t \\ y & = -3+t \\ z & = 1+t \end{array}\right.$

c) Comme $H \in D$, il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées $\left\{\begin{array}{ll} x & = 2+t \\ y & = -3+t \\ z & = 1+t \end{array}\right.$
   Comme de plus $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation de P donc $x+y+z-3 = 2+t-3+t+1+t-3 = 0$, soit $3t - 3 = 0$ et donc $t = 1$.
   On a ainsi $H(3;-2;2)$.

d) La distance du point M au plan P est HM. Comme $\overrightarrow{HM}(-1;-1;-1)$, on a donc $HM = \sqrt{3}$.