# Corrigé

**Exercice** 1

1. $F$ est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.
   En d'autres termes, on a $F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$.
   En particulier, comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, ce qui montre que $F$ est strictement croissante.
2. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $t > 0 \iff e^t > e^0 = 1$, et donc, en divisant par $t > 0$, $\dfrac{e^t}{t} > \dfrac{1}{t}$.

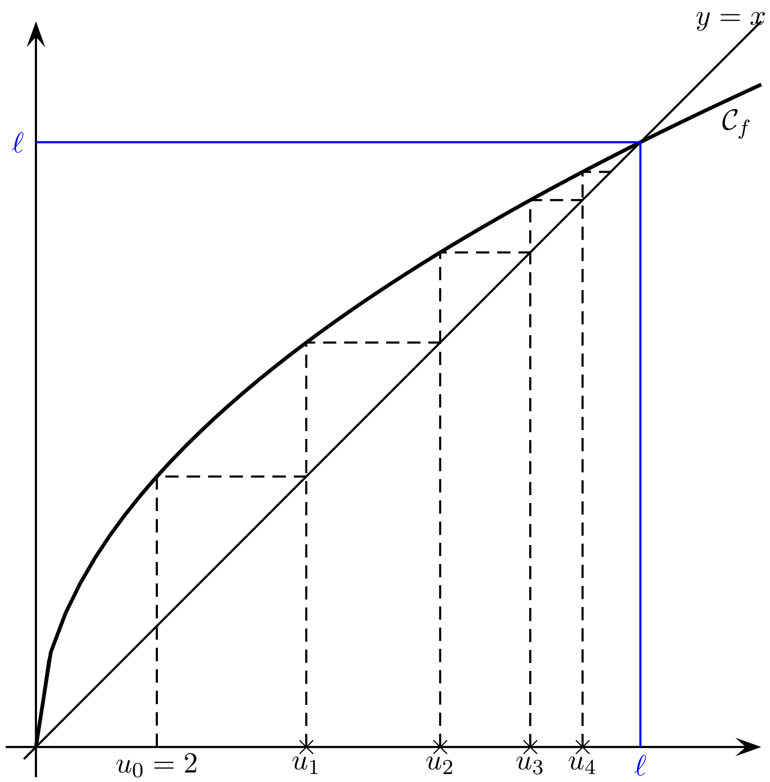
   Comme l'intégrale conserve l'ordre, pour $x > 1$, on a alors $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt > \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

   Or $G(t) = \ln(t)$ est la primitive qui s'annule en 1 de $g(t) = \dfrac{1}{t}$, et donc $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = G(x) = \ln(x)$.

   On a ainsi $\varphi(x) = F(x) - \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - \int_1^x \frac{1}{t}dt > 0$
3. Pour $x > 1$, on a donc $\varphi(x) = F(x) - \ln(x) > 0 \iff F(x) > \ln(x)$.
   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, et donc d'après le corollaire du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

**Exercice** 2

a)




On peut conjecturer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante, minorée par 2, majorée par 10, et convergente vers une limite $l$.

b)

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right) - \ln(10) \\
&= \ln\left(\sqrt{10u_n}\right) - \ln(10) \\
&= \frac{1}{2}\ln(10u_n) - \ln(10) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln(10) + \ln\left(u_n\right)\Big) - \ln(10) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(u_n\right) - \frac{1}{2}\ln(10) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(u_n\right) - \ln(10)\right) = \frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

Ainsi, la $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On en déduit que, pour tout entier $n$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \frac{1}{2^n}\left(\ln(2) - \ln(10)\right) = -\frac{\ln(5)}{2^n}$, et donc, que $v_n = \ln\left(u_n\right) - \ln(10) = \ln\left(\frac{u_n}{10}\right) \iff u_n = 10e^{v_n}$.

c) Comme $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, et alors, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10e^{v_n} = 10$.