Corrigé

Exercice 1 Le vecteur $\vec{u}(-3;1;2)$ est un vecteur directeur de D_1.
Le vecteur $\vec{v}(6;-2;-4)$ est un vecteur directeur de D_2.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car $\vec{v}=-2\vec{u}$, et les droites D_1 et D_2 sont donc parallèles.
Elles peuvent être confondues ou strictement parallèles.
$M(2;1;-3)$ est un point de D_1. Dans la représentation paramétrique de D_2 :

$$\left\{\begin{array}{ll} 2 & =6t \\ 1 & =2-2t \\ -3 & =5-4t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3} \\ t=\dfrac{1}{2} \\ t=2 \end{array}\right.$$

ce qui est impossible est montre donc que $M\notin D_2$. Ainsi, D_1 et D_2 sont strictement parallèles.

Le vecteur $\vec{w}(2;2;-1)$ est un vecteur directeur de D_3. Comme $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, les droites D_1 et D_3 ne sont pas parallèles.
Soit $M(x;y;z)$ un éventuel point commun à D_1 et D_3, alors alors il existe deux réels t et t' tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 2-3t & = & 7+2t' \\ y & = & 1+t & = & 2+2t' \\ z & = & -3+2t & = & -6-t' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2t' & = & -5-3t \\ 2t' & = & -1+t \\ -3+2t & = & -6-t' \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent $2t'=-5-3t=-1+t \Longrightarrow t=-1$, et donc, $t'=-1$. La dernière équation est aussi vérifiée.
Ces deux droites sont donc sécantes en $M(5;0;-5)$.

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires et les droites D_2 et D_3 ne sont donc pas parallèles. On cherche de même que précédemment un point d'intersection $N(x;y;z)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 6t & = & 7+2t' \\ y & = & 2-2t & = & 2+2t' \\ z & = & 5-4t & = & -6-t' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2t' & = & -7+6t \\ 2t' & = & -2t \\ 5-4t & = & -6-t' \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent $2t'=-7+6t=-2t \Longrightarrow t=\dfrac{7}{8}$ et donc $t'=-t=-\dfrac{7}{8}$.
Par contre la dernière équation n'est pas vérifiée : $5-4t=5+4\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{68}{8}\neq -6-t'=-6-\dfrac{7}{8}=-\dfrac{55}{8}$, et il n'existe donc pas de réels t et t' ; les droites D_2 et D_3 ne sont pas sécantes.

Exercice 2

1. F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{e^x}{x}$.
   En d'autres termes, on a $F'(x)=f(x)$ et $F(1)=0$.
   En particulier, comme $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$, on a $F'(x)=f(x)=\dfrac{e^x}{x}>0$ sur $]0;+\infty[$, ce qui montre que F est strictement croissante.
2. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $t>0 \iff e^t>e^0=1$, et donc, en divisant par $t>0$, $\dfrac{e^t}{t}>\dfrac{1}{t}$.
   Comme l'intégrale conserve l'ordre, pour $x>1$, on a alors $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt>\int_1^x\frac{1}{t}dt$.
   Or $G(t)=\ln(t)$ est la primitive qui s'annule en 1 de $g(t)=\dfrac{1}{t}$, et donc $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}dt=G(x)=\ln(x)$.
   On a ainsi $\varphi(x)=F(x)-\ln(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{e^t}{t}dt-\int_1^x\frac{1}{t}dt>0$
3. Pour $x>1$, on a donc $\varphi(x)=F(x)-\ln(x)>0 \iff F(x)>\ln(x)$.
   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, et donc d'après le corollaire du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.