Corrigé

Exercice 1 Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -8 < 0$. L'équation admet donc deuxsolutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,(1-i) \quad , \qquad z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2}\,(1+i)$$

On a $|z_1| = 2$ et $arg\,(z_1) = \theta$ tel que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, et donc, $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
On a alors, $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{i\frac{pi}{4}}$.

Exercice 2

1. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x}$.
   Pour $x > 0$, on $x^2 > 0$, donc $2x^2 + 1 > 1 > 0$, et ainsi, $g'(x) > 0$, et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$.
   En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc, par addition des limites : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. g est continue, strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty > 0$, donc, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) il existe une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$.
   A la calculatrice, on a $g(0,65) < 0$ et $g(0,66) > 0$, ce qui montre que $0,65 < \alpha < 0,66$.
3. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x + 2\dfrac{1}{x}\ln(x) = \dfrac{2}{x}\left(x^2 + \ln(x)\right) = \dfrac{2}{x} g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

f admet donc bien un minimum en $x = \alpha$.