Corrigé

Exercice 1

1. A l'aide de la calculatrice, on trouve $P\left(X\in\left[5{,}7\,;\,6{,}3\right]\right)\simeq 0,68$.
   Sans calculatrice, on sait d'après le cours, que si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, alors $P\left(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant X+\sigma\right)\simeq 0,68$.
2. a) La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

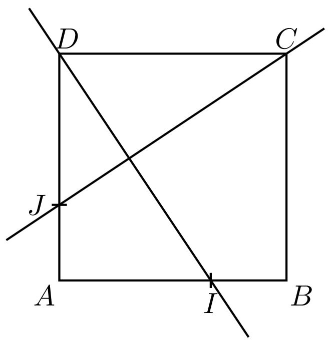
   b)
$$\begin{aligned}P\left(X\in\left[5{,}7\,;\,6{,}3\right]\right) &= P\left(5,7\leqslant X\leqslant 6,3\right)\\ &= P\left(\frac{5,7-6}{\sigma}\leqslant\frac{X-6}{\sigma}\leqslant\frac{6,3-6}{\sigma}\right)\\ &= P\left(-\frac{0,3}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{0,3}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

   c) On veut que $P\left(-\dfrac{0,3}{\sigma}\leqslant X\leqslant\dfrac{0,3}{\sigma}\right)=0,95$.
   De même que précédemment, on sait d'après le cours, que pour la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, on a $P\left(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma\right)\simeq 0,95$.
   Ici, avec $\mu=6$, on veut donc que $5,7=\mu-2\sigma=6-2\sigma$ et $6,3=\mu+2\sigma=6+2\sigma$.
   On veut donc que l'écart-type soit $\sigma=0,15$.

   Deuxième méthode : En notant Π la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Pi(t)=P(Z\leqslant t)$, on a : $P\left(-\dfrac{0,3}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\dfrac{0,3}{\sigma}\right)=2\Pi\left(\dfrac{0,3}{\sigma}\right)-1$.
   On veut donc que $2\Pi\left(\dfrac{0,3}{\sigma}\right)-1=0,95\iff\Pi\left(\dfrac{0,3}{\sigma}\right)=\dfrac{1+0,95}{2}=0,975$.
   A la calculatrice, ou avec une table de valeurs de Π, on trouve que $\Pi(1,96)\simeq 0,975$.
   Ainsi, on veut que $\dfrac{0,3}{\sigma}\simeq 1,96\iff\sigma\simeq\dfrac{0,3}{1,96}\simeq 0,15$.

Exercice 2 Pour montrer que les droites (DI) et (JC) sont perpendiculaires, on peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont orthogonaux, donc que leur produit scalaire est nul.

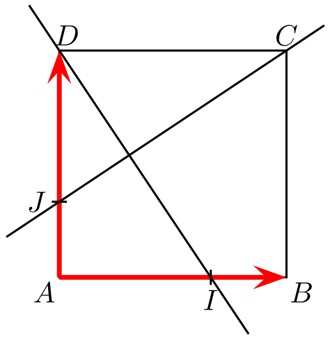
Méthode 1 :



En notant $a=AB$ le coté du carré :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{JC} &= \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DC}\right)\\ &= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{JD}+\underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JD}}_{=0}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DC}\\ &= \left(-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\\ &= -\frac{2}{3}a^2+\frac{2}{3}a^2=0\end{aligned}$$

Méthode 2 : Dans le repère **orthonormal** $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$:



On a les coordonnées des points $J\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$, $D\,(0;1)$, $I\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ et $C\,(1;1)$, donc des vecteurs $\overrightarrow{DI}\left(\dfrac{2}{3};-1\right)$ et $\overrightarrow{JC}\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{JC} = \dfrac{2}{3}\times 1 + (-1)\times\dfrac{2}{3} = 0$.