Corrigé

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2i\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) \\ &= 4\sqrt{3}+4i \end{aligned}$$

2. On a donc, $\left|z^2\right| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+4^2} = 8$ et $\arg\left(z^2\right) = \theta$ avec $\cos\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Comme $\left|z^2\right| = |z|^2 = 8$, on en déduit que $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   De plus, $\arg\left(z^2\right) = 2\arg(z) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et ainsi, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, d'où $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12}$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12} - \pi = -\dfrac{11\pi}{12}$.
   Comme la partie réelle de z est positive $\left(\Re e(z) = \sqrt{3}+1\right)$, on a nécessairement $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2

1. A l'aide de la calculatrice, on trouve $P\left(X \in [5{,}7\,;\,6{,}3]\right) \simeq 0,68$.
   Sans calculatrice, on sait d'après le cours, que si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, alors $P\left(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant X + \sigma\right) \simeq 0,68$.
2. a) La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

   b)

$$\begin{aligned} P\left(X \in [5{,}7\,;\,6{,}3]\right) &= P\left(5,7 \leqslant X \leqslant 6,3\right) \\ &= P\left(\frac{5,7-6}{\sigma} \leqslant \frac{X-6}{\sigma} \leqslant \frac{6,3-6}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{0,3}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{0,3}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

   c) On veut que $P\left(-\dfrac{0,3}{\sigma} \leqslant X \leqslant \dfrac{0,3}{\sigma}\right) = 0,95$.
   De même que précédemment, on sait d'après le cours, que pour la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, on a $P\left(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\right) \simeq 0,95$.
   Ici, avec $\mu = 6$, on veut donc que $5,7 = \mu - 2\sigma = 6 - 2\sigma$ et $6,3 = \mu + 2\sigma = 6 + 2\sigma$.
   On veut donc que l'écart-type soit $\sigma = 0,15$.

   Deuxième méthode : En notant Π la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Pi(t) = P(Z \leqslant t)$, on a : $P\left(-\dfrac{0,3}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,3}{\sigma}\right) = 2\Pi\left(\dfrac{0,3}{\sigma}\right) - 1$.
   On veut donc que $2\Pi\left(\dfrac{0,3}{\sigma}\right) - 1 = 0,95 \iff \Pi\left(\dfrac{0,3}{\sigma}\right) = \dfrac{1+0,95}{2} = 0,975$.
   A la calculatrice, ou avec une table de valeurs de Π, on trouve que $\Pi(1,96) \simeq 0,975$.
   Ainsi, on veut que $\dfrac{0,3}{\sigma} \simeq 1,96 \iff \sigma \simeq \dfrac{0,3}{1,96} \simeq 0,15$.