Corrigé

Exercice 1

1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1-2x}{x^2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
x^2	‖	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+2\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Limite en 0 : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 + 2x\ln(x)\right)$, avec, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left(1+2x\ln(x)\right) = +\infty$, et alors, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Ainsi, par addition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 2

1. $\omega^5 = \left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = e^{5\times 2i\frac{\pi}{5}} = e^{2i\pi} = 1$.
2. $S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$.
Ainsi, $S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$.
3.
$$\begin{aligned}
u + v &= \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 = S - 1 = -1 \\
uv &= \left(\omega + \omega^4\right)\left(\omega^2 + \omega^3\right) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 \\
&= \omega^3\left(1 + \omega + \omega^3 + \omega^4\right) = \omega^3\left(S - \omega^2\right) \\
&= \omega^3\left(-\omega^2\right) = -\omega^5 = -1
\end{aligned}$$
4. On a donc $v = -1 - u$ et donc, $uv = -1 \iff u(-1-u) = -1 \iff u^2 + u - 1 = 0$.
Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 5 > 0$ et admet donc deux solutions réelles : $u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Comme $u = \omega + \omega^4$ est un réel positif, on a nécessairement $u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et donc $v = -1 - u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
5. $\omega^4 = \dfrac{\omega^5}{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = e^{-2i\pi/5} = \overline{\omega}$. Ainsi, $u = \omega + \overline{\omega} = 2\Re e\left(\omega\right) = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
D'après le résultat de la question précédente, on a donc, $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.