

Nombres et plan complexes

Les exercices fondamentaux à connaître

Y. Morel

Version en ligne et interactive :

<https://xymaths.fr/Lycees/TS/Exercices-Corriges-Complexes.php>

Table des matières

1	Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle	1
2	Résolution d'équations	4
3	Puissance d'un nombre complexe	5
4	Détermination d'ensembles de points dans le plan complexe	6
5	Exercices complets type Bac	8

1 Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

Exercice 1 : Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1 + 2i)(-2 + i)$

Solution: $z_1 = (1 + 2i)(-2 + i) = -2 + i - 4i + 2i^2 = -2 - 3i - 2 = -4 - 3i$

2. $z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i)$

Solution : $z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i) = |1 + 2i|^2$ (car $z \bar{z} = |z|^2$)

soit, $z_2 = 1^2 + 2^2 = 5$

3. $z_3 = \frac{2}{1 + i}$

Solution : $z_3 = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2i}{2} = 1 - i$

$$4. z_4 = \frac{2i}{3-2i}$$

$$\text{Solution : } z_4 = \frac{2i}{3-2i} = \frac{2i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6i-4}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{6}{13}i$$

$$5. z_5 = \frac{2+i}{2-i}$$

$$\text{Solution : } z_5 = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$6. z_6 = \frac{2+3i}{-2+i}$$

$$\text{Solution : } z_6 = \frac{2+3i}{-2+i} = \frac{(2+3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-1-8i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$$

$$7. z_7 = \frac{2i}{(1-i)(1+2i)}$$

$$\begin{aligned} \text{Solution : } z_7 &= \frac{2i}{(1-i)(1+2i)} = \frac{2i(1+i)(1-2i)}{(1-i)(1+i)(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{2i(3-i)}{2 \times 5} = \frac{2+6i}{10} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

$$8. z_8 = 2e^{i\pi}$$

$$\text{Solution : } z_8 = 2e^{i\pi} = 2(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = 2(-1 + i \times 0) = -2$$

$$9. z_9 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Solution : } z_9 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

$$10. z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{Solution : } z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$\text{d'où, } z_{10} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

Exercice 2 : Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$1. z_1 = (1+3i)(5-i)$$

Solution : Pour déterminer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique :

$$z_1 = 5 - i + 15i - 3i^2 = 5 + 14i + 3 = 8 + 14i.$$

La partie réelle de z_1 est donc $\Re(z_1) = 8$, et sa partie imaginaire $\Im(z_1) = 14$.

2. $z_2 = (2 + i)^2$

Solution : Pour déterminer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique :

$$z_2 = 2^2 + 4i + i^2 = 2^2 + 4i - i = 3 + 4i$$

La partie réelle de z_2 est donc $\Re(z_2) = 3$, et sa partie imaginaire $\Im(z_2) = 4$.

3. $z_3 = \frac{1 + 3i}{4 + 2i}$

Solution : Pour déterminer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique :

$$z_3 = \frac{(1 + 3i)(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{10 + 10i}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

La partie réelle de z_3 est donc $\Re(z_3) = \frac{1}{2}$, et sa partie imaginaire $\Im(z_3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 : Ecrire les nombres complexes suivants sous formes trigonométrique et exponentielle

1. $z_1 = 1 + i$

Solution : On calcule le module et un argument de z_1 .

$$|z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{De plus, si } \theta_1 = \arg(z_1), \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ d'où } \theta_1 = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc, } z_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{forme trigonométrique}) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (\text{forme exponentielle}) \end{aligned}$$

2. $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

Solution : On calcule le module et un argument de z_2 .

$$|z_2| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{De plus, si } \theta_2 = \arg(z_2), \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ d'où } \theta_2 = -\frac{\pi}{6} [2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc, } z_2 &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \quad (\text{forme trigonométrique}) \\ &= 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad (\text{forme exponentielle}) \end{aligned}$$

$$3. z_3 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$$

Solution : On peut chercher tout d'abord à écrire z_3 sous forme algébrique et procéder comme précédemment.

On peut aussi directement calculer le module et un argument de z_3 en utilisant les règles de calcul sur les modules et argument d'un quotient :

$$|z_3| = \left| \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \right| = \frac{|1+i|}{|1-i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{De plus, } \theta_3 = \arg(z_3) = \arg\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right) = \arg(1+i) - \arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

(d'après les calculs des deux premières questions).

$$\text{On a donc, } z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \quad (\text{forme trigonométrique})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \quad (\text{forme exponentielle})$$

2 Résolution d'équations

Exercice 4 : Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $(1+2i)z + 2 = 3z - 2i$.

Solution : C'est une équation du premier degré dans \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} (1+2i)z + 2 = 3z - 2i &\iff (-2+2i)z = -2-2i \\ &\iff z = \frac{-2-2i}{-2+2i} \\ &= \frac{(-2-2i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} \\ &= \frac{8i}{8} \\ &= i \end{aligned}$$

Exercice 5 : Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $(1+i)\bar{z} + 2 = -z + i$.

Solution : On revient à des nombres réels en posant $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels que l'on cherche à déterminer.

L'équation s'écrit alors :

$$\begin{aligned}(1+i)(x-iy)+2 &= -(x+iy)+i \iff (x+y+2)+i(x-y) = -x+i(-y+1) \\ &\iff (2x+y+2)+i(x-1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2+y+2=0 \\ x=1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=-4 \\ x=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $z = 1 - 4i$ est la solution de cette équation.

Exercice 6 : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation du second degré :

1. $z^2 + 25 = 0$

Solution : L'équation est équivalente à $z^2 = -25$, d'où $z = 5i$ ou $z = -5i$.

(Inutile de calculer Δ ici ...)

2. $z^2 + 8 = 0$

Solution : L'équation est équivalente à $z^2 = -8$, d'où $z = i\sqrt{8} = i2\sqrt{2}$ ou $z = -i2\sqrt{2}$.

(Inutile de calculer Δ ici ...)

3. $z^2 - z + 1 = 0$

Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

4. $z^2 - 5z + 4 = 0$

Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$.

L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

5. $\frac{4}{9}z^2 - \frac{4}{3}z + 1 = 0$

Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{4}{9} \times 1 = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$.

L'équation admet donc une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-\left(-\frac{4}{3}\right)}{2 \times \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{2}$$

6. $2z^2 + 3z + 5 = 0$

Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = -31 < 0$.

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{31}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3 + i\sqrt{31}}{4}.$$

3 Puissance d'un nombre complexe

Exercice 7 :

1. Calculer la forme algébrique de $i^2, i^3, i^4, i^{123}, i^{2013}$.

Solution : Par définition même du nombre $i, i^2 = -1$,

puis, $i^3 = i^2 \times i = -i$,

et $i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = 1$.

On a donc, pour tout entier $n, i^{4n} = (i^4)^n = (1)^n = 1$.

Ainsi, comme $2013 = 4 \times 503 + 1, i^{2013} = i^{4 \times 503 + 1} = i^{4 \times 503} \times i^1 = (i^4)^{503} \times i = 1^{503} \times i = i$

2. Ecrire sous forme algébrique la somme : $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012}$.

Solution : S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison i :

$$S = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} = \frac{1 - i^{2013}}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

Exercice 8 : On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la forme algébrique de j^{39} .

Solution : La forme la plus adaptée pour calculer la puissance d'un nombre complexe est la forme exponentielle, car on peut alors utiliser simplement les règles de calcul de l'exponentielle, en particulier $(e^a)^b = e^{ab}$.

On calcule donc le module et un argument du nombre complexe j :

$$\bullet |j| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\bullet \arg(j) = \theta \text{ tel que } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ d'où, } \theta = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

On a donc, $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, et donc, $j^{39} = (e^{2i\frac{\pi}{3}})^{39} = e^{2i\frac{\pi}{3} \times 39} = e^{2i\pi \times 13} = e^{26i\pi} = e^{0i}$,
car $26\pi = 13 \times 2\pi \equiv 0 [2\pi]$.

Ainsi, $j^{39} = e^0 = 1$.

4 Détermination d'ensembles de points dans le plan complexe

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$.

Solution : Géométriquement, un module est une distance : $AB = |z_B - z_A|$.

Ici, si on définit les points A et B du plan complexe d'affixes $z_A = i$ et $z_B = -1$,

alors $|z - i| = |z + 1| \iff |z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM$.

L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z - 1 + 2i| = |-3 + 4i| .$$

Solution : On a $|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Soit de plus le point A d'affixe $z_A = 1 - 2i$, alors on cherche l'ensemble des points M tels que

$$|z - 1 + 2i| = |-3 + 4i| \iff |z - z_A| = 5 \iff AM = 5$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice 11 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $Z = z^2 + \bar{z}$ soit réel.

Solution :

On pose $z = x + iy$, avec x et y des nombres réels.

Alors, $Z = z^2 + \bar{z} = (x + iy)^2 + (x - iy) = x^2 + x - y^2 + i(2xy - y) = x^2 + x - y^2 + iy(2x - 1)$.

Ainsi, Z est réel si et seulement si

$$\begin{aligned} \Im(Z) = 0 &\iff y(2x - 1) = 0 \iff (y = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0) \\ &\iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble E est la réunion des droites d'équation $y = 0$ (axe des abscisses, ou axe des réels) et $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 12 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $Z = (1 + z)(i + \bar{z})$ soit réel.

Solution :

On pose $Z = x + iy$, avec x et y des nombres réels.

Alors, $Z = (1 + z)(i + \bar{z}) = (1 + (x + iy))(i + (x - iy)) = ((1 + x) + iy)(x + i(1 - y))$
 soit, $Z = (x(1+x) - y(1+y)) + i(xy + (1+x)(1-y)) = (x(1+x) - y(1+y)) + i(1+x-y)$.
 Ainsi, Z est réel si et seulement si $\Im m(Z) = 0 \iff 1 + x - y = 0 \iff y = x + 1$.

L'ensemble E des points est donc la droite d'équation $y = x + 1$.

5 Exercices complets type Bac

Exercice 13 : Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite de points (M_n) et la suite des affixes (z_n) définies par :

$$z_0 = 8 \text{ et, pour tout entier } n, z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n$$

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$. L'écrire sous forme trigonométrique.

Solution : $\left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{|1 + i\sqrt{3}|}{|4|} = \frac{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Soit $\theta = \arg\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{4}\right)$,

alors, $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Ainsi, $\frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$.

2. Calculer z_1 , z_2 et z_3 et vérifier que z_3 est réel.

Solution : $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} 8 = 2(1 + i\sqrt{3})$

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}2(1+i\sqrt{3}) = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}$$

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}(-1+i\sqrt{3}) = \frac{-4}{4} = -1 \text{ et on a donc bien, } z_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Pour tout nombre entier naturel n :

a. calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$;

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} &= \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n - z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = \frac{z_n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4} - 1 \right)}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-3+i\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3} \end{aligned}$$

b. en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}|z_{n+1}|$.

Solution : On a $(\overrightarrow{OM_{n+1}}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}\right)$, soit, d'après le calcul pr ec edent,
 $(\overrightarrow{OM_{n+1}}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (car $i\sqrt{3}$ est un nombre imaginaire pur).
Ainsi, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en M_{n+1} .

De plus, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n \iff z_n = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}z_{n+1}$, et donc,

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - z_n| &= \left| z_{n+1} - \frac{4}{1+i\sqrt{3}}z_{n+1} \right| = \left| z_{n+1} \left(1 - \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \right) \right| \\ &= |z_{n+1}| \times \left| 1 - \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \right| = |z_{n+1}| \times \left| \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right| \\ &= |z_{n+1}| \times \frac{|-3+i\sqrt{3}|}{|1+i\sqrt{3}|} = |z_{n+1}| \times \frac{\sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} \\ &= |z_{n+1}| \frac{\sqrt{12}}{2} = |z_{n+1}| \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}|z_{n+1}| \end{aligned}$$

Exercice 14 : Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note f la fonction qui, à tout point M d'affixe $z \neq -1$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = f(z) = \frac{-iz - 2}{z + 1}.$$

On se propose de rechercher, de deux manières différentes, l'ensemble (E) des points M tels que M' appartient à l'axe des abscisses, privé de O .

A - Méthode analytique x et y désignent deux nombres réels tous les deux non nuls.

1. Développer l'expression $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2$.

Solution : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + x + y^2 - 2y + \frac{5}{4}$.

2. On pose $z = x + iy$. Exprimer $\Im m(z')$ en fonction de x et y .

Solution : $z' = \frac{-iz - 2}{z + 1} = \frac{-i(x + iy) - 2}{x + iy + 1} = \frac{(y - 2) - ix}{(x + 1) + iy}$.

Pour déterminer $\Im m(z')$, on exprime z' sous forme algébrique :

$$z' = \frac{[(y - 2) - ix][(x + 1) - iy]}{[(x + 1) + iy][(x + 1) - iy]} = \frac{((y - 2)(x + 1) - xy) - i(x(x + 1) + y(y - 2))}{(x + 1)^2 + y^2}$$

Ainsi,

$$\Im m(z') = -\frac{x(x + 1) + y(y - 2)}{(x + 1)^2 + y^2}$$

3. En déduire l'ensemble (E) des points M lorsque M' appartient à l'axe des abscisses, privé de O .

Solution : L'ensemble (E) est l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des abscisses, privé de O , c'est-à-dire tels que $\Im m(z') = 0$.

D'après la question précédente, on a donc,

$$\Im m(z') = 0 \iff -\frac{x(x + 1) + y(y - 2)}{(x + 1)^2 + y^2} = 0 \iff x(x + 1) + y(y - 2) = 0$$

Or, d'après la question 1., $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + x + y^2 - 2y + \frac{5}{4} = x(x + 1) + y(y - 2) + \frac{5}{4}$,
et ainsi,

$$x(x + 1) + y(y - 2) = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$$

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B - Méthode géométrique

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$,

$$z' = -i\omega, \text{ où } \omega = \frac{z - 2i}{z + 1}.$$

Solution : $z' = \frac{-iz - 2}{z + 1} = \frac{-i\left(z + \frac{2}{i}\right)}{z + 1}$

or, $\frac{2}{i} = \frac{2 \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{-2i}{1} = -2i$, d'où, $z' = \frac{-i(z - 2i)}{z + 1} = -i \frac{z - 2i}{z + 1} = -i\omega$.

2. A et B sont les points d'affixes respectives $2i$ et -1 .

Donner une interprétation géométrique d'un argument de ω , lorsque $z \neq 2i$.

Solution : Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = -1$,

alors, $\omega = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, et donc, $\arg(\omega) = \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$.

Un argument de ω est donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$.

3. Exprimer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(\omega)$.

Solution : $\arg(z') = \arg(-i\omega) = \arg(-i) + \arg(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arg(\omega)$

4. Dédurre de ce qui précède l'ensemble (E) .

Solution : L'ensemble (E) est l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des abscisses, privé de O , c'est-à-dire tels que $\arg(z') = \pi \ [\pi]$

(c'est-à-dire $\arg(z') = 0 \ [2\pi]$ ou $\arg(z') = \pi \ [2\pi]$).

Ainsi, on doit avoir $\arg(z') = -\frac{\pi}{2} + \arg(\omega) = \pi \ [\pi]$,

soit encore, $\arg(\omega) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{3\pi}{2} \ [\pi]$,

c'est-à-dire que le triangle ABM est rectangle en M .

On en déduit que l'ensemble (E) des points M est le cercle de diamètre $[AB]$.

Remarque : le centre de ce cercle est le milieu du diamètre $[AB]$, qui a donc pour affixe

$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2i - 1}{2} = -\frac{1}{2} + i.$$

Le rayon du cercle de diamètre $[AB]$ est $R = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-1 - 2i|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

On retrouve ainsi le centre Ω et le rayon R du cercle déterminé dans la partie A.