L'objectif de ce problème est l'étude de la suite (u_n) définie par,

$$\text{pour tout entier } n \text{ non nul,} \quad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

1. **Question de cours.** Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

2. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
   On considère la fonction f définie sur $I =]0;+\infty[$ par l'expression $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

   a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b) Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de f'.

   c) Démontrer que la dérivée f'' de la fonction f' s'écrit $f''(x) = -\dfrac{1}{x(1+x)^2}$.
   En déduire alors le sens de variation de la fonction f'.

   d) Déduire des questions précédentes le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de la fonction f.

   e) On pose $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Donner l'expression de $g(x)$, puis la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   f) En utilisant les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.

3. **Etude de la suite (u_n).**

   a) Exprimer le terme général u_n, pour n un entier naturel non nul, à l'aide de la fonction f.

   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite.