Réviser, approfondir son année de terminale

et préparer son entrée en prépa (et/ou ailleurs aussi)

Partie I : du calcul

1 Calcul numérique et algébrique général

Tous les calculs doivent être simplifiés. Même si "simple" et "simplifié" (ou non) sont assez subjectifs, quelques règles pour les exercices qui suivent (et ensuite toute votre vie mathématique...)

- on factorise **toujours**, **le plus possible**
  par exemple : $3x^7+6ax^2+12x=3x\left(x^6+2ax+4\right)$
- on utilise le moins de fractions possible (on réduit les sommes de plusieurs fractions en utilisant un dénominateur commun), et avec un trait de fraction le plus court possible,
  par exemple : $\dfrac{3x+7a^2+3}{2}-\dfrac{2x+5}{3}=\dfrac{1}{6}\left(5x+21a^2-1\right)$

Tous les calculs suivants doivent être considérés comme **faciles**. "Facile" est là aussi subjectif, certes ... Cela ne signifie pas forcément que le résultat peut, ou doit, être vu de tête, en un coup d'œil, ... mais que armé d'une feuille et d'un stylo, il est facile de mener les calculs jusqu'au bout, **sans se poser de question de méthode, ni faire d'erreur**.

Exercice 1 On pose $f(x)=x\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$. Présenter sous la forme la plus simple $f(2)$, $f(3)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 2 Simplifier :

$$A=\dfrac{\dfrac{1}{3}+3}{\dfrac{1}{6}+6}\qquad B=3\times\dfrac{2+\dfrac{1}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}\qquad C=2\times\dfrac{\dfrac{7}{2}+1}{\dfrac{3}{4}-5}-\dfrac{5}{3}\qquad D(x)=3+\dfrac{6}{x+2}\qquad E=\dfrac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{15}{\frac{9}{2}}}{\dfrac{9}{15}\times\dfrac{5}{2}}$$

$$F(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\qquad G(x)=\dfrac{7}{x^2+3}-1\qquad H(x)=-2-\dfrac{3x-1}{x-2}\qquad I(x)=\dfrac{\dfrac{3x}{2}-5}{\dfrac{x}{3}+3}$$

$$J=\dfrac{\dfrac{a^2}{3b}}{\dfrac{ac}{6b}}\qquad K(x)=2x-1+\dfrac{3x}{2x-1}\qquad L(x)=-x+2-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2x}{x+2}\qquad M=\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$N=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2\qquad N'=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2\qquad P=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2-\sqrt{3}}$$

$$Q=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\qquad R=3-\dfrac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\qquad S=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+5}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}}\qquad T=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$U = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \qquad V = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \qquad W = \frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}} \qquad X = \frac{2+\dfrac{2+a}{2-a}}{2-\dfrac{2+a}{2-a}}$$

2 Récurrence

Exercice 3 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, (les trois premières sommes sont à connaître par cœur)

a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, pour $a \neq 1$

d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

e) n^3-n est multiple de 3

f) On pose $u_0=1$ et $u_1=-1$, puis $u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n$ pour tout entier n.
Montrer que $u_n=(-1)^n$.

g) On pose $u_0=1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

Montrer que $u_n=(-1)^n$.

3 Sommes

Exercice 4 Donner une expression simplifiée (et sans somme) de la somme des entiers impairs

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Exercice 5 On pose, pour tout entier n non nul, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$.

Étudier le sens de variation de (u_n).

Exercice 6 On note H_n la somme harmonique, pour $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

Exercice 7 En utilisant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$$

Exercice 8 Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

En déduire une expression de la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

et la limite de cette somme lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 Simplifier le produit

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$