Exercice 1 $u_n = \dfrac{2n+1}{4n(n+1)} = \dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{4n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{2n}}{2n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1n}\right) = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(1+\dfrac{1}{1n}\right) = +\infty$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$v_n = \frac{2n^2\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 2\frac{1+\dfrac{1}{2n^2}}{1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 2\frac{1+\dfrac{1}{2n^2}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

Ainsi, par quotient et produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} \end{cases}$

1. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}+1} = \dfrac{\dfrac{2u_n-6}{u_n+3}}{\dfrac{6u_n+6}{u_n+3}} = \dfrac{2\left(u_n-3\right)}{6\left(u_n+1\right)} = \dfrac{1}{3}v_n$.

   Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

2. Comme $v_0 = \dfrac{u_0-3}{u_0+1} = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$, on a alors, pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{-1}{3^n}$

3. $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \iff v_n\left(u_n+1\right) = u_n - 3 \iff u_n\left(v_n-1\right) = -v_n - 3 \iff u_n = -\dfrac{v_n+3}{v_n-1}$.

   On a donc aussi, d'après la question précédente, $u_n = -\dfrac{-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+3}{-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-1}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, car $0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+3\right) = 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-1\right) = -1$, et, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = ku_n\left(1-u_n\right)$.

1. Dans cette question, on donne $u_0 = 0,4$ et $k = 1$, soit $u_{n+1} = u_n\left(1-u_n\right)$.

   a $u_{n+1} - u_n = u_n\left(1-u_n\right) - u_n = -u_n^2$.

   Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$, et la suite (u_n) est donc décroissante.

   b Démontrons par récurrence la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0,4$, et on a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

   Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   Alors, $-1 \leqslant -u_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$. Ainsi, comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a donc en multipliant ces deux dernières inégalités $0 \leqslant u_n\left(1-u_n\right) \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   La propriété est donc encore vraie au rang $(n+1)$.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

une limite l.

d La limite l vérifie nécessairement (point fixe) $l = l(1-l) \iff l = 0$.
Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

2. Dans cette question, on donne $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$, soit $u_{n+1} = 1,8u_n(1-u_n)$.

a. Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 1,8(-2x+1)$.

De plus, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,45$	$\searrow$	0

b. Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 1,8 \times 0,3\,(1-0,3) = 0,378$.
On a bien ainsi $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme la fonction f est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on a donc $f(0) \leqslant f\left(u_n\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, $f(0) = 0$, $f\left(u_n\right) = u_{n+1}$, $f\left(u_{n+1}\right) = u_{n+2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$, et la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c. La suite (u_n) est donc croissante est majorée par $\dfrac{1}{2}$. On en déduit qu'elle converge vers une limite l.

d. La limite l vérifie nécessairement $l = 1,8l(1-l) \iff 1,8l^2 - 0,8l = 0 \iff l\,(1,8l - 0,8) = 0$
$\iff l = 0$ ou $l = \dfrac{0,8}{1,8} = \dfrac{4}{9}$.
Or (u_n) est croissante avec $u_0 = 0,3 > 0$, et donc, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0,3$.
La limite de la suite ne peut donc être que $l = \dfrac{4}{9}$.