Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 *(Baccalauréat Amérique du nord, juin 2005)*

1. La fonction f est une fonction rationnelle, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc aussi sur $[0;2]$, et

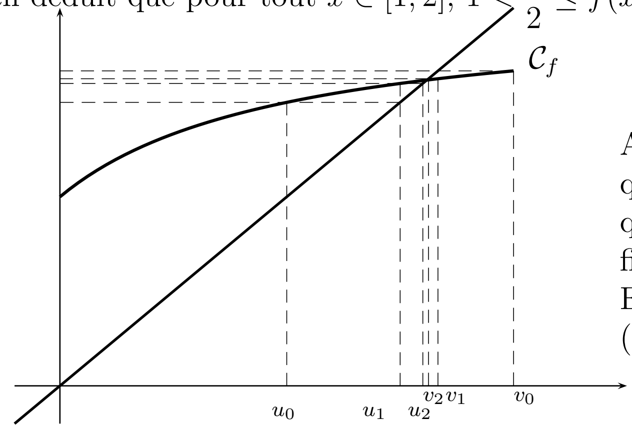
pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$.

x	0 2
$f'(x)$	$+$
f	$1 \nearrow \frac{5}{3}$

f est continue et strictement croissante sur $[0;2]$, donc sur $[1;2]$, avec de plus $f(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{5}{2}$.

On en déduit que pour tout $x \in [1;2]$, $1 < \dfrac{3}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{5}{2} < 2$, soit pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \in [1;2]$.

2. a)



A partir de ce graphique, on peut conjecturer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, et que ces deux suites convergent vers le point fixe l de f : $f(l) = l$.
En d'autres termes, on peut conjecturer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n \leq 2$:
Initialisation : $v_0 = 2$, donc $1 \leq v_0 \leq 2$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $1 \leq v_n \leq 2$.
Alors, d'après 1., $v_{n+1} = f(v_n) \in [1;2]$, et donc la propriété est vraie aussi au rang $n+1$.
Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n \leq 2$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$:
Initialisation : $v_0 = 2$ et $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$, donc $v_1 \leq v_0$, et la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $v_{n+1} \leq v_n$.
Alors, comme d'après ce qui précède, pour tout entier n, $v_n \in [1;2]$ et que d'après 1. f est croissante sur $[1;2]$, $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq v_{n+1}$, et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$.

c) Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\ &= \frac{(2v_n+1)(u_n+1) - (2u_n+1)(v_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)} = \frac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \end{aligned}.$$

On en déduit, par récurrence que pour tout entier n, $v_n - u_n \geq 0$:
Initialisation : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons que $v_n - u_n \geq 0$, alors, comme $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$, et $u_n + 1 > 0$ et $v_n + 1 > 0$, on end déduit que $v_{n+1} - u_{n+1}$ est aussi positif, c'est-à-dire que la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $v_n - u_n \geq 0$.

De plus, d'après 2.b), pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$, d'où, $4 \leq (u_n+1)(v_n+1) \leq 9$.
Ainsi, $\dfrac{v_n - u_n}{9} \leq \dfrac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \dfrac{v_n - u_n}{4}$,
soit, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Initialisation : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, alors, on en déduit d'après 2.c) que, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n) \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$, et ainsi la propriété est encore vraie au rang $n+1$. Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) D'après 2.b), on sait que (v_n) est décroissante et que (u_n) est croissante.
De plus, d'après la question précédente, on sait que pour tout entier n, $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Finalement, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et elles convergent donc vers une même limite α.
De plus, comme pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$, on sait aussi que $\alpha \in [1;2]$. f étant continue sur $[1;2]$, on sait d'après le théorème du point fixe que (u_n) converge vers α tel que $f(\alpha) = \alpha$, soit
$f(\alpha) = \alpha \iff \dfrac{2\alpha+1}{\alpha+1} = \alpha \iff \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \iff \alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
Comme la première racine est négative et que $\alpha \in [1;2]$, on en déduit que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2

1. a) g est une fonction polynôme, donc ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont égales aux limites de son terme de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

b) g, étant une fonction polynôme, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout x réel,

$$g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-4) = 3(x-2)(x+2)$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g			0				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-32		

c) g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[2;3]$; g est strictement croissante sur $[3;5]$, avec $g(3) = -25 < 0$ et $g(5) = 49 > 0$. On en déduit donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3;5]$.
On trouve (par dichotomie par exemple) que $\alpha = 4$ (exactement).

d) D'après le tableau de variation de g, $g(x) \leq 0$ pour tout $x \leq \alpha$, et donc,

x	$-\infty$		-2		$\alpha = 4$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

2. a) Limite en 2^+ : $\lim\limits_{x\to2}(x^3 + 2x^2) = 16 > 0$,

Signe de $x^2 - 4$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et donc, $\lim\limits_{x\to2^+}(x^2 - 4) = 0^+$,

d'où, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Limite en $+\infty$: f est une fonction rationnelle donc sa limite en $+\infty$ est égale à la limite du rapport de ses termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

b) Pour tout $x > 2$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-4)^2}$.

x	2		$\alpha = 4$		$+\infty$
x		$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$(x^2-4)^2$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

c) Pour tout $x > 2$, $f(x) - (x+2) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4} - (x+2) = \dfrac{x^3+2x^2-(x+2)(x^2-4)}{x^2-4} = \dfrac{4x+8}{x^2-4}$.

$f(x)-(x+2)$ est une expression rationnelle qui a donc pour limite en $+\infty$ la limite du rapport de ses termes de plus haut degré : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$.

On en déduit donc, que la droite d'équation $y = x+2$ est bien asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 3 *(D'après baccalauréat Polynésie française, septembre 2006)*

1. La fonction f est le produit de la fonction polynôme $x \mapsto 2x^3 - 4x^2$ et de la fonction exponentielle $x \mapsto e^{-x}$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f'(x) &= (6x^2-8x)e^{-x} + (2x^3-4x^2)\left(-e^{-x}\right)\\ &= e^{-x}\left(-2x^3+10x^2-8x\right)\\ &= 2xe^{-x}\left(-x^2+5x-4\right)\end{aligned}$$

Soit P le trinôme $P(x) = -x^2+5x-4$, de discriminant $\Delta = 25-16 = 9 = 3^2 > 0$. P admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-5-3}{-2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-5+3}{-2} = 1$.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
e^{-x}		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$P(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	$\frac{64}{e^4}$	$\searrow$	

2. a) On peut envisager (au moins) deux méthodes :

<u>1</u>

1$^{\text{ère}}$ méthode, en dérivant : la fonction v est composée des fonctions u, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc v est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, $v(x) = u(h(x))$, et donc, $v'(x) = h'(x)\,u'(h(x)) = -\dfrac{1}{x^2}u'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout $x>0$, $-\dfrac{1}{x^2} < 0$. De plus, si $x \in \left[\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{a}\right]$, alors $\dfrac{1}{x}\in[a;b]$, et comme u est croissante sur $[a;b]$, on a donc, $u'\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

On en déduit que $v'(x) < 0$ pour $x \in \left[\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{a}\right]$, et donc que v est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{a}\right]$.

2$^{\text{ème}}$ méthode : Soit $\dfrac{1}{b} < x < y < \dfrac{1}{a}$, alors en prenant l'inverse : $b > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y} > a$, puis en appliquant la fonction u qui est croissante sur $[a;b]$, $u(b) > u\left(\dfrac{1}{x}\right) > u\left(\dfrac{1}{y}\right) > u(b)$, soit en particulier, $v(x) > v(y)$, et donc la fonction v est décroissante.

b) D'après ce qui précède, g et f ont un sens de variation contraire :

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
g		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	

Exercice 4 *(D'après baccalauréat C, Aix-Marseille 1989)*

1) $\displaystyle\lim_{0\to0^+}\frac{x}{\sqrt{3}} = 0$, et $\displaystyle\lim_{0\to0^+}\frac{\sqrt{3}}{2x} = +\infty$, d'où, $\displaystyle\lim_{0\to0^+} f(x) = +\infty$.

On en déduit donc que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$, et, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3}} = +\infty$, d'où, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$.

On en déduit donc que la droite d'équation $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $]0;+\infty[$, comme somme d'une fonction affine $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2x^2} = \dfrac{2x^2-3}{2x^2\sqrt{3}}$.

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$2x^2-3$		$-$	0	$+$	
$2x^2\sqrt{3}$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Les points d'intersection de Δ et de $\mathcal{C}_f$ ont pour abscisse x tel que, $f(x) = m$, soit $\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2x} = m \iff \dfrac{2x^2+3}{2x\sqrt{3}} = m \iff P(x) = 2x^2 - 2mx\sqrt{3} + 3 = 0$.

Le nombre de points d'intersection des deux courbes est donc le nombre de racines de ce trinôme du second degré $P(x)$.

Le trinôme $P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = (2m\sqrt{3})^2 - 24 = 12m^2 - 24 = 12(m^2-2)$.

- Si $\Delta > 0 \iff m \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$, P admet deux racines réelles distinctes, et donc Δ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en deux points distincts.
- Si $\Delta = 0 \iff m = -\sqrt{2}$ ou $m = \sqrt{2}$, P admet une racine réelle double, et les courbes Δ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en un unique point.
- Si $\Delta < 0 \iff m \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$, P n'admet aucune racine et les courbes n'ont aucun point d'intersection.

4) Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ les points d'intersection de Δ et $\mathcal{C}_f$, ,et $I(x_I; y_I)$.

Par définition de Δ, on a $y_A = yB = m$, et donc $y_I = m$.

De plus, x_A et y_A sont les racines du trinôme $P(x) = 2x^2 - 2mx\sqrt{3} + 3 = 0$ de la question précédente.

Ainsi, la somme $x_A + x_B$ des racines est : $x_A + x_B = \dfrac{2m\sqrt{3}}{2} = m\sqrt{3}$, et donc, l'abscisse du point I est $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit en particulier que I est sur la droite d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$.