Correction du devoir de mathématiques $T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 **Commun à tous les candidats** **7 points**

Partie A - Restitution organisée des connaissances : voir cours

Partie B - Etude de fonction

I - **Etude d'une fonction auxiliaire** : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. g est la différence de la fonction du second degré $x :\mapsto x^2+1$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction logarithme népérien dérivable sur $]0;+\infty[$. g est donc dérivable $]0;+\infty[$ avec, $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|$	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	

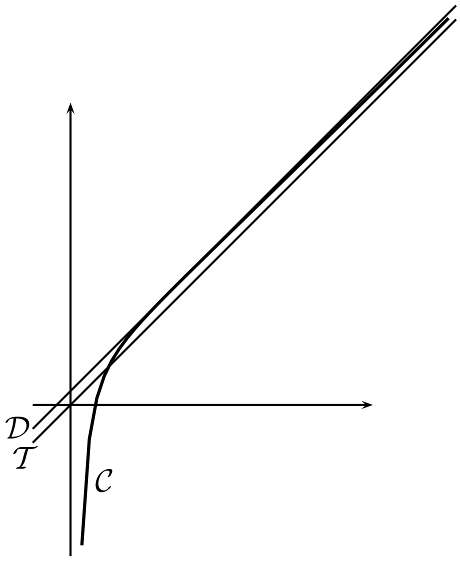
2. Le minimum de g sur $]0;+\infty[$ est $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2} + \ln\left(\sqrt{2}\right) > 0$, car $\ln(\sqrt{2}) > \ln(1) = 0$. Ainsi, $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

II - **Etude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$**

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, d'où, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} \times \ln x = -\infty$
   On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, d'où, par addition des limites $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(f(x) - x\Big) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; on en déduit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.
   f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$, avec, $f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 + x^2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$
4. Comme $x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$, on en déduit, d'après la question I.2. que $f'(x) > 0$ et donc que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Soit $A(x;y)$; alors $\mathcal{T} /\!/ \mathcal{D} \iff f'(x) = 1 \iff \dfrac{g(x)}{x^2} = 1 \iff \ln x = 1 \iff x = e$.
   Comme $A(e;y) \in \mathcal{C}$, on a donc $y = f(x) = f(e) = e + \dfrac{\ln e}{e} = e + \frac{1}{e}$, d'où les coordonnées $A\left(e; e + \dfrac{1}{e}\right)$.



6.

III - **Calcul d'une aire**

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)\ dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}.$
2. L'aire de la région est donnée
$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,dx = \int_0^e \left(x + \frac{\ln x}{x}\right)\,dx = \int_0^e x\,dx + \int_0^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2 \simeq 3,69$$
Comme l'unité graphique est de 3cm, l'aire vaut donc $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}e^2 \times 3^2 = \dfrac{9e^2}{2} \simeq 33,25$ cm^2.

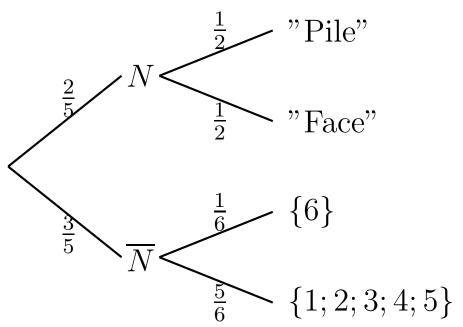
Exercice 2 **Commun à tous les candidats** **3 points**

1. **Proposition 1 :** Vrai.
Soit la propriété P_n : "$t_n = \dfrac{n}{n+1}$"
Initialisation : Pour $n = 0$, $t_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$, donc P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, P_n soit vraie.
Alors, $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, d'après l'hypothèse de récurrence, soit $t_{n+1} = \dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$, et donc finalement, $t_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1}$ et la propriété P_{n+1} est aussi vraie.
Conclusion : On en déduit donc, d'après le principe de récurrence que la propriété P_n est vraie pour tout entier n, soit, pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. **Proposition 2 :** Vrai.
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donc convergentes vers une limite commune l. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que la suite (w_n) est aussi convergente vers la même limite l.
3. **Proposition 3 :** Faux.
Soit par exemple, $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x+1$.
Alors, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, et $\int_0^1 g(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.
On a donc bien $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$, mais $f \neq g$ sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice 3 Commun à tous les candidats **5 points**

1. a. Il y a $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ tirages possibles en tout, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ façon de tirer une boule noire parmi la seule boule noire du jeu, et $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ façons de tirer les 3 autres boules parmi les 9 restantes.

   Au final, on a : $P(N) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}} = \dfrac{2}{5}$

   b. 

   $$P(G) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{10}$$

   c. Sachant qu'il a tiré la boule, la probabilité qu'il ne gagne pas est :

   $$P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(N \cap \overline{G}}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{2}{7}$$

2. a) Il y a trois gains (algébriques) possibles : $-m+4$ euros, 0 euros et $-m$ euros, pour lesquels on a les probabilités :
   $P(X = -m + 4) = P(G) = \dfrac{3}{10}$
   $P(X = 0) = P(N \cap \overline{G}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5}$
   $P(X = -m) = P(\overline{N} \cap \overline{G}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2}$.

   b) L'espérance mathématique de X est :
   $E(X) = (-m + 4) \times \dfrac{3}{10} + 0 \times \dfrac{1}{5} - m \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{4}{5}m + \dfrac{6}{5}$.

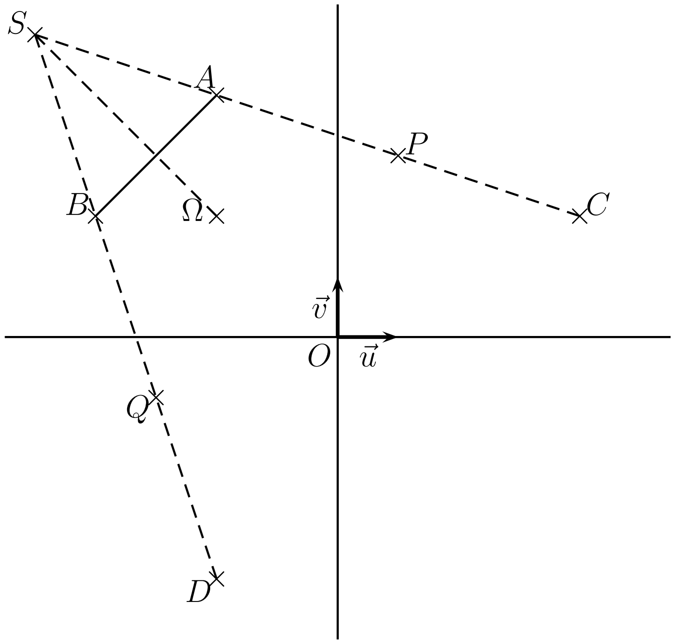
   c) $E(X) = 0 \iff -\dfrac{4}{5}m + \dfrac{6}{5} = 0 \iff m = \dfrac{3}{2}$.
   Le jeu est donc équitable pour une mise de $m = 1,5$ euros.

3. La même expérience est répétée n fois identiquement et de manière indépendante. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
   La probabilité de gagner au moins une fois est : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$. Or, $P(X = 0)$ est la probabilité de perdre à tous les coups, soit $P(X = 0) = (1 - P(G))^n = \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

   On en déduit donc que : $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$

   On veut $P(F) > 0,999$, soit
   $$1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \iff \left(\frac{7}{10}\right)^n < 0,001 \iff n \ln\left(\frac{7}{10}\right) < \ln(0,001) \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)} \simeq 19,4$$
   La probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999 pour $n \geq 20$.

Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**



1. a. L'écriture complexe de h est : $z' - s = 3(z - s) \iff z' + 5 - 5i = 3(z + 5 - 5i)$.

   b. $C = h(A) \iff c + 5 - 5i = 3(a + 5 - 5i) \iff c = 4 + 2i$.

   $D = h(B) \iff d + 5 - 5i = 3(b + 5 - 5i) \iff d = -2 - 4i$.

2. On calcule les modules $|a| = |b| = |c| = |d| = \sqrt{20}$. On en déduit que les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{20}$.

3. On a $SA = |a - s| = |3 - i| = \sqrt{10}$, $SB = |b - s| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$, et donc $SA = SB$: S est sur la médiatrice de $[AB]$.

   De même, $\Omega A = |a - \omega| = |2i| = 2$, et $\Omega B = |b - \omega| = |-2| = 2$, et donc, $\Omega A = \Omega B$: Ω est sur la médiatrice de $[AB]$.

   On en conclut finalement que $(S\Omega)$ est la médiatrice de $[AB]$.

4. a. $p = \dfrac{a + c}{2} = \dfrac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i$.

   b. $\dfrac{\omega - p}{d - b} = \dfrac{-3 - i}{2 - 6i} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{3 + i}{1 - 3i} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(3 + i)(1 + 3i)}{10} = -\dfrac{2}{i}$

   On en déduit que $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{P\Omega}) = \arg\left(\dfrac{\omega - p}{d - b} = \dfrac{-3 - i}{2 - 6i}\right) = \arg\left(-\dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

5. D'après 4-b., Ω est sur la hauteur de PQS issue de P.

   On sait que $(S\Omega)$ est la médiatrice de $[AB]$ donc aussi de $[CD]$, car l'homothétie h transforme B en D et A en C (et conserve les longueurs et les angles car c'est une isométrie).

   D'après le théorème de Thalès (ou théorème des milieux), $(PQ)//(DC)$, et comme $(S\Omega) \perp (CD)$, on a donc $(S\Omega) \perp (QP)$.

   Fianlement Ω est à l'intersection de deux hauteurs du triangle PQS, donc aussi de la troisième, et Ω est donc l'orthocentre de PQS.