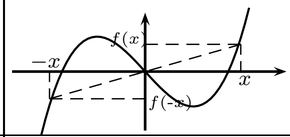
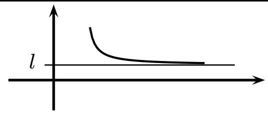
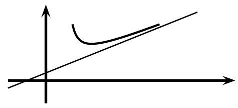
Devoir de mathématiques $T^{\text{ale}}S$

Exercice 1

a) Compléter le tableau

Langage des fonctions	Langage algébrique	Langage graphique	Graphique
f est impaire	Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$	$\mathcal{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie	
Limites de f	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$	$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $\pm\infty$	
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big[f(x)-(ax+b)\big] = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$	

b) Le taux d'accroissement en 0 est : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}-0}{h} = \sqrt{h}$.

On a donc, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$. On en déduit que $\underline{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0) = 0}$.

c) Soit $f(x) = e^x$, alors, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(0+x)-f(0)}{x} = f'(0)$.

Comme $f'(x) = e^x$, alors $f'(0) = e^0 = 1$, et donc, $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1}$.

d) D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

$\dfrac{x}{e^x-x} = \dfrac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right) = +\infty$, et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1} = 0$

Exercice 2 *(Baccalauréat France métropolitaine, Septembre 2007, 5 points)*

1. On a $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\Big[1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\Big]$.

2. – $|z_1|^2 = 2+6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}\ \ [2\pi]$.

   – On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$.

   – Il suit $\arg(Z) = arg(\dfrac{z_1}{z_2})$ $=\arg(z_1)-\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}\ \ [2\pi]$. et $|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1$.

3. On en déduit que $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et par identification avec la forme algébrique du 1) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

4. Le module : $|Z^{2007}| = |Z|^{2007} = 1^{2007} = 1$.

   L'argument : $\arg(Z^{2007}) = 2007 \times \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{669\pi}{4} = \dfrac{672\pi-3\pi}{4} = 168\pi - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}\ \ [2\pi]$.

   On a donc $Z^{2007} = e^{-\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 *(D'après baccalauréat Pondichéry, Avril 2008)*

1. (a) $z = \dfrac{1}{y} \iff y = \dfrac{1}{z}$. z est dérivable et $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'z^2 \iff y' = -\dfrac{z'}{z^2}$.

   On a donc : $y' = \dfrac{1}{20}y(10-y) \iff -\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{1}{20}\dfrac{1}{z}\left(10 - \dfrac{1}{z}\right) \iff z' = -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{20}$.

   (b) Les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions $x \mapsto z(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}$.

   Les solutions de (E) sont donc les fonctions : $x \mapsto \dfrac{1}{K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}}$.

2. g est une solution de (E) telle que $g(0) = 1 \iff \dfrac{1}{K\mathrm{e}^{-\frac{0}{2}} + \dfrac{1}{10}} = 1 \iff \dfrac{1}{K + 0,1} = 1 \iff K = \dfrac{9}{10}$.

   Finalement $g(x) = \dfrac{1}{\frac{9}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}} = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1}$.

3. On a $g'(x) = -\dfrac{10 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2} = \dfrac{45\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 10$. Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

Exercice 4 *(Baccalauréat Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004, 5 points)*

1. $u_1 = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{\frac{7}{2}+4}{2} = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2} = \dfrac{29}{8}$ et $v_2 = \dfrac{\frac{29}{8}+\frac{15}{4}}{2} = \dfrac{59}{16}$.

2. (a) Calculons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+v_n-2u_{n+1}}{2} = \dfrac{v_n - u_{n+1}}{2} = \dfrac{v_n - \dfrac{u_n+v_n}{2}}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{4} = \dfrac{1}{4}w_n$. La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   (b) On sait que donc $w_n = w_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$; or $w_0 = 4 - 3 = 1$. Donc pour tout entier n, $w_n = \dfrac{1}{4^n}$.

   Comme la raison $\dfrac{1}{4}$ est comprise entre 0 et 1, on sait de plus que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0_+$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2} > 0$, car la suite (w_n) est positive. (u_n) est donc croissante.

   De même $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \dfrac{\dfrac{u_n+v_n}{2} - v_n}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = -\dfrac{1}{4}(v_n - u_n) = -\dfrac{1}{4}w_n < 0$.
   La suite (v_n) est donc décroissante. D'autre part la différence $v_n - u_n = w_n$ a pour limite 0.
   Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite ℓ.

4. (a) On a $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \dfrac{\frac{u_n+v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3} = \dfrac{u_n + v_n + 2v_n + u_n + v_n}{6} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} = t_n$.

   La suite (t_n) est donc constante et donc pour tout entier n, $t_n = t_0 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$.

   (b) De $t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \dfrac{11}{3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n+2v_n}{3} = \dfrac{\ell + 2\ell}{3} = \ell$.

   Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{11}{3}$.