Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et -1.
   Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = -5$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_n + \frac{18}{n} - 4\,.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
   Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de la suite (u_n).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 4n-9$.

Exercice 3 Soit f la fonction tangente, définie sur $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et que $f'(x) = 1+\tan^2(x)$.
2. Exprimer, pour tout $x \in I$, $\tan(\pi - x)$ puis $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 4 On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ par les expressions $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{3}{4}$ et $g(x) = \sqrt{3x-2}+1$.
On note $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ leur courbe représentative respective.

1. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et des axes du repère.
   b) Dresser le tableau de variation de f. Préciser les limites en l'infini.
2. a) Etudier la limite de g en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de g.
3. a) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
   b) On dit que deux courbes sont tangentes en un point lorsque, en ce point, les deux courbes ont la même tangente.
   Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tangentes au point d'abscisse 1.
4. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère en utilisant tous les résultats précédents.