Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Etude de propriétés de la fonction f**
   a. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.
   c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0; \alpha]$.
2. **Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$**
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \dfrac{5}{u_n + 1}$.
   a. Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction f, et placer le points A_0 de coordonnées $(u_0; 0)$ et construire les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 2

1. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 - 3x - 4$.
   a. Etudier les variations de f, et dresser son tableau de variation.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution a sur $[2; 3]$.
   Donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-2}.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2}$.
   a. Calculer la dérivée g' de g et montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b. En déduire les variations de g.

Exercice 3

Partie A Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $\varphi(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées $(0; 3)$ à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2 + 1}$, α et β étant deux réels que l'on déterminera.
2. Etudier la fonction f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Etudier la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à la tangente (T) au point I de coordonnées $(0; 3)$.
4. Construire la courbe (C) ; on prendre pour unité 2 cm.
5. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $g(x) = f(|x|)$ et (C') sa courbe représentative.
   Sans étudier la fonction g, construire (C') sur le graphique précédent.