Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $u_n = \dfrac{2n+1}{4n(n+1)} = \dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{4n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{2n}}{2n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1n}\right)=1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(1+\dfrac{1}{1n}\right)=+\infty$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$v_n = \dfrac{2n^2\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 2\dfrac{1+\dfrac{1}{2n^2}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$, et ainsi, par quotient et produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

$w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$, par somme des limites, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Exercice 2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
2. On cherche à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Soit donc un nombre réel A quelconque, et on cherche s'il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont dans $]A;+\infty[$, c'est-à-dire $u_n > A$.

   Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un rang N tel que $u_N > A$.
   De plus, (u_n) est croissante, et donc, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$, c'est-à-dire que, à partir du rang N, tous les termes u_n sont bien dans l'intervalle $]A;+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel A, on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} \end{cases}$

1. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}+1} = \dfrac{\dfrac{2u_n-6}{u_n+3}}{\dfrac{6u_n+6}{u_n+3}} = \dfrac{2\left(u_n-3\right)}{6\left(u_n+1\right)} = \dfrac{1}{3}v_n$.

   Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$.
2. Comme $v_0 = \dfrac{u_0-3}{u_0+1} = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$, on a alors, pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{-1}{3^n}$
3. $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \iff v_n\left(u_n+1\right) = u_n - 3 \iff u_n\left(v_n-1\right) = -v_n-3 \iff u_n = -\dfrac{v_n+3}{v_n-1}$.

   On a donc aussi, d'après la question précédente, $u_n = -\dfrac{-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+3}{-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-1}$

Exercice 4 *(Bac S, 20 juin 2013, 4,5 points)*

1. a. On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :
   $u_1 = 2+\dfrac{1}{3} \approx 2,33\,;\quad u_2 = 2+\dfrac{8}{9}\approx 2,89\,;\quad u_3 = 3+\dfrac{16}{27}\approx 3,59\,;\quad u_i = 4+\dfrac{32}{81}\approx 4,40$

b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. a. Nous allons montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_n \leqslant n+3$.

   Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0+3=3$, on vérifie bien :
   $u_0 \leqslant 0+3$: *la propriété* $\mathcal{P}_0$ *est bien vraie.*

   Hérédité : Pour un entier k naturel donné, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.
   On a $u_{k+1} = \dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1$.
   Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k+3$
   En multipliant par un nombre positif : $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}(k+3)$, soit $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}k+2$
   Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre : $\dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1 \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2 + \dfrac{1}{3}k + 1$
   Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k+3 \leqslant k+4$. On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1)+3$, c'est à dire que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est encore vraie.

   Conclusion : Puisque la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, on a $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n+3$.

   b. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - u_n = -\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{3}{3}$

   On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\dfrac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

3. a. Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{2}{3}n = \dfrac{2}{3}(u_n - n)$
   Donc $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$.

   La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

   b. On peut donc en déduire que pour totu entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :
   $u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :
   $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

   c. Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1, on en déduit que la limite de la suite v est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.