Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $F(x) = xe^{-x}$.

1. Montrer que F est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^{-x}$.
   Existe-t'il d'autres primitives de la fonction f ?
2. La fonction f est-elle une fonction densité de loi de probabilité sur l'intervalle $[0;1]$?

Exercice 2 **QCM** Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Indiquez la question et sa réponse sur la copie, en justifiant le choix.

1. X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2;20]$.
   La probabilité $P_{(X>4)}(5 \leqslant X \leqslant 10)$ est égale à :
   a) $\dfrac{5}{18}$ b) $\dfrac{5}{16}$ c) $\dfrac{1}{4}$
2. On note X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   $P(1 \leq X \leq 3)$ est égal à :
   a) $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$ b) $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$ c) $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$ d) $\dfrac{e^{-3\lambda}}{e^{-\lambda}}$
3. La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{6}$.
   Sachant que l'automobiliste a déjà attendu 2 min, la probabilité que son temps d'attente total soit inférieur à 5 min est approximativement égal à :
   a) $0,3935$ b) $0,5654$ c) $0,6065$
4. On note X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et $\mu = E(X)$ son espérance. La probabilité que X soit supérieure à son espérance μ est :
   a) $\dfrac{1}{2}$ b) $e^{-\lambda^2}$ c) $1 - \dfrac{1}{e}$ d) $\dfrac{1}{e}$

Exercice 3 *(Bac S, 28 mai 2013, Liban, 5 points)*
L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »

C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.
   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.
   a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].
   c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.
   On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,4324	0,985
2,4573	0,986
2,4838	0,987
2,5121	0,988
2,5427	0,989
2,5758	0,990
2,6121	0,991
2,6521	0,992
2,6968	0,993