Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 **Loi Gamma**, de densité $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

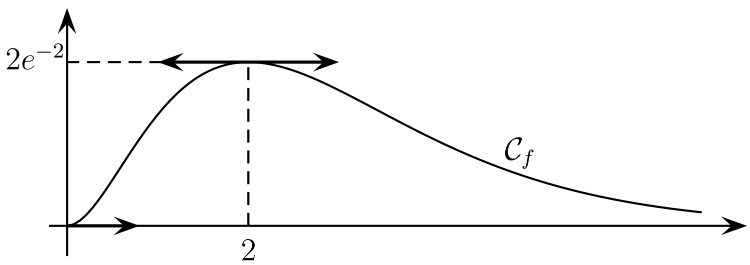
1. En $+\infty$: par croissances comparées de l'exponentielle et des polynômes en l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   En 0 : f est continue en 0, avec donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$.

2. $f = \frac{1}{2}u\,v$, avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = e^{-x} = e^{w(x)},\ w(x) = -x \end{cases}$, et donc $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x} \end{cases}$.

   Ainsi, $f' = \frac{1}{2}\left(u'v + uv'\right) = \frac{1}{2}\left(2xe^{-x} + x^2\left(-e^{-x}\right)\right) = \frac{1}{2}xe^{-x}\left(2-x\right)$.

x	0		2		$+\infty$
x	0	$+$	$\vert$	$+$	
e^{-x}		$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0



3. On a $F = u\,v$ avec $\begin{cases} u(x) = ax^2+bx+c \\ v(x) = e^{-x} = e^{w(x)},\ w(x) = -x \end{cases}$, et donc $\begin{cases} u'(x) = 2ax+b \\ v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x} \end{cases}$.

   Ainsi, $F' = u'v+uv' = (2ax+b)e^{-x} + \left(ax^2+bx+c\right)\left(-e^{-x}\right) = \left(-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right)e^{-x}$.

   Ainsi, F est une primitive de f si $F' = f$, soit $\begin{cases} -a = \frac{1}{2} \\ 2a-b = 0 \\ b-c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2a = -1 \\ c = b = -1 \end{cases}$

   Ainsi, $F(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

4. Comme pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$, on a $f(x) \geqslant 0$.

   De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\Big(F(A) - F(0)\Big)$.

   Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2+2x+2}} = 0$, par croissances comparées en $+\infty$ de l'exponentielle et des polynômes.

   On a donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -F(0) = 1$.

   En résumé, f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.

5. $P\left(1 \leqslant X \leqslant 3\right) = \int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = 5e^{-2} - \frac{17}{2}e^{-3}$.

   $P\left(X \geqslant 2\right) = 1 - \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 1 - \Big(F(2) - F(0)\Big) = 5e^{-2}$.

Exercice 2 **Nouvelle Calédonie, novembre 2011**

1. La densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

   On a alors, $P\left(X \leqslant t\right) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$

2. On a donc $0,6=\displaystyle\int_0^7 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \iff 0,6=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^7 \iff 0,6=-e^{-7\lambda}+1 \iff e^{-7\lambda}=0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien $-7\lambda=\ln(0,4) \iff \lambda=\dfrac{\ln(0,4)}{-7}\approx 0,1308\approx 0,131$ à 10^{-3} près.

3. On a $p\left(X>5\right)=1-p\left(X\leqslant 5\right)=1-\displaystyle\int_0^t 0,131e^{-0,131x}\,dx=1-\left[-e^{-0,131x}\right]_0^5=1+e^{-0,131\times 5}-1\approx 0,519\approx 0,52$ à 10^{-2} près.

4. Puisqu'on a une loi sans vieillissement : $p_{(X>4)}\left(X>9\right)=\dfrac{P\Big(\left(X>4\right)\cap\left(X\ 9\right)\Big)}{P\left(X>4\right)}=\dfrac{P\left(X>9\right)}{P\left(X>4\right)}$, soit, en réutilisant le résultat de la question précédente, $p_{(X>4)}\left(X>9\right)=\dfrac{e^{-0,131\times 9}}{e^{-0,131\times 4}}=e^{-0.131\times 5}\approx 0,52$.

5. On a $p(6\leqslant \mathrm{X}\leqslant 10)=p(X\leqslant 10)-p(X\leqslant 6)=(1-e^{-0,131\times 10})-(1-e^{-0,131\times 6})=e^{-0,131\times 6}-e^{-0,131\times 10}\approx 0,19$.

6. a) Les temps sont supposés indépendants de durée supérieure ou égale à 5 heures (avec une probabilité égale à 0,52) ou inférieure à 5 heures (avec une probabilité égale à $1-0,52=0,48$). La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $p=0,52$ et $n=8$.

   b) On a $p(Y=3)=\dbinom{8}{3}\times 0,52^3\times 0,48^{8-3}=56\times 0,52^3\times 0,48^5\approx 0,20$.

   c) On a $\mathrm{E(Y)}=n\,p=8\times 0,52=4,16\approx 4$.