Devoir de mathématiques

Exercice 1 Asie, *juin 2011*

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.
   b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   c) En déduire les variations de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.
   a) Montrer la relation, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.
   b) Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.
   c) Calculer la dérivée g' de la fonction g.
   d) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

Exercice 2 Liban, *mai 2014*

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 3 Antilles-Guyane, *septembre 2014*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

   $$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.