Exercice 1 *(Baccalauréat France métropolitaine, Septembre 2007, 5 points)*

1. On a $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$.

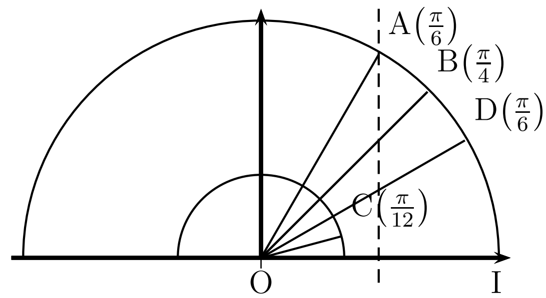
2. — $|z_1|^2 = 2+6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}\ \ [2\pi]$.

   — On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$.

   — Il suit $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}\ \ [2\pi]$. et $|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1$.

3. On en déduit que $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et par identification avec la forme algébrique du 1) :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

4. On place facilement le point B(2 ; 2) :
   Le point A d'affixe z_1 est obtenu en construisant la médiatrice du segment [OI].
   Le point D est obtenu en construisant la bissectrice de $\widehat{\mathrm{IOA}}$.
   Le point C avec la bissectrice de $\widehat{\mathrm{IOD}}$ et le cercle de centre O et de rayon 1.

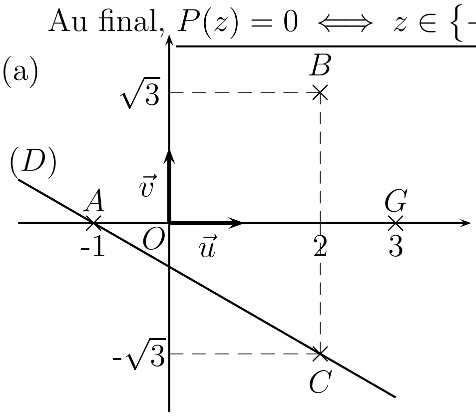


5. Le module : $|Z^{2007}| = |Z|^{2007} = 1^{2007} = 1$.
   L'argument : $\arg(Z^{2007}) = 2007 \times \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{669\pi}{4} = \dfrac{672\pi - 3\pi}{4} = 168\pi - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}\ \ [2\pi]$.
   On a donc $Z^{2007} = e^{-\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 *(Baccalauréat Antilles-Guyane, Juin 2000, 5 points)*

1. (a) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$
   (b) $(z+1)(z^2+az+b) = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b$ donc,
   $$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2+az+b) \iff \begin{cases} a+1 = -3 \\ a+b = 3 \\ b = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases},$$
   d'où, $\underline{P(z) = (z+1)(z^2-4z+7)}$.
   (c) Le trinôme $z^2 - 4z + 7$ a pour discriminant : $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$, et admet donc deux racines complexes conjuguées.
   Au final, $\underline{P(z) = 0 \iff z \in \left\{-1; 2-i\sqrt{3}; 2+i\sqrt{3}\right\}}$.

2. (a)



   (b) $AB = |z_B - z_A| = |(2+i\sqrt{3}) - (-1)| = 2\sqrt{3}$
   $BC = |z_C - z_B| = (2-i\sqrt{3}) - (2+i\sqrt{3})| = 2\sqrt{3}$
   $AC = |z_C - z_A| = (2-i\sqrt{3}) - (-1)| = 2\sqrt{3}$
   On en déduit que <u>le triangle ABC est équilatéral</u>.

   (c) $$Z = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-1-(2-i\sqrt{3})}{3-(2-i\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}(4i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

que le triangle GAC est rectangle en C.

Exercice 3 *(Centres étrangers, Juin 2010)* **5 points**

1. On a $M = M'$ lorsque $z = z'$, soit :

$$z' = z = \frac{iz}{z+1} \iff z(z+1) = iz \iff z^2 + z(1-i) = 0 \iff z\left[z - (-1+i)\right] = 0$$

soit donc, $z = 0$ ou $z = -1+i$: les points d'affixes 0 et $-1+\text{i}$ vérifient $M' = M$.

2. Pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$OM' = |z'| = \left|\frac{iz}{z+1}\right| = \frac{|iz|}{|z+1|} = \frac{|i|\,.\,|z|}{|z+1|} = \frac{|z|}{|z+1|} = \frac{OM}{AM}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u},\, \overrightarrow{OM'}\right) &= \text{Arg}\left(\frac{iz}{z+1}\right) = \text{Arg}(iz) - \text{Arg}(z+1) \quad [2\pi] \\ &= \text{Arg}(i) + \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z+1) \quad [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2} + \left(\vec{u},\, \overrightarrow{OM}\right) - \left(\vec{u},\, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\vec{u},\, \overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{AM},\, \vec{u}\right) \quad [2\pi]] \\ &= \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM},\, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA},\, \overrightarrow{MO}\right) \quad [2\pi]\end{aligned}$$

3. (a) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$. (Voir figure en fin d'exercice)

   (b) Calcul de l'affixe b' du point B' image du point B par f :

$$b' = \frac{i\left(-\frac{1}{2}+i\right)}{-\frac{1}{2}+i+1} = \frac{-1-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}+i} = \frac{-2-i}{1+2i} = \frac{(-2-i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i$$

   B' appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1, car :

$$|b'| = \left|\frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = 1 \iff OM = 1 \iff M \in \mathcal{C}$$

   (c) Si M est sur la médiatrice (Δ), on a $OM = AM \iff 1 = \frac{OM}{AM} = OM'$. Ainsi M' est sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

   (d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
   Le point C' est sur le cercle $(\mathcal{C})$. On a $\left(\vec{u},\, \overrightarrow{OC'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{CA},\, \overrightarrow{CO}\right) \quad [2\pi]$.
   On a de plus, d'après la question 2., $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}\right) + \frac{\pi}{2} \ [2\pi] = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \ [2\pi] = \frac{5\pi}{6} \ [2\pi]$, et, comme $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit que C' a comme ordonnée $\frac{1}{2}$ et se trouve donc aussi sur la médiatrice de $[OD]$, avec $D(i)$.

4. Géométriquement, M' est sur l'axe des abscisses si et seulement si $\left(\vec{u},\, \overrightarrow{OM'}\right) = 0 \ [\pi]$. Soit, d'après la question 2.,

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} = 0 \ [\pi] \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MO}$$

On en déduit donc que M est sur le cercle de diamètre $[AO]$.